现代物理基础丛书 58

经典电动力学

张锡珍　张焕乔　著



现代物理基础丛书　58

经典电动力学

张锡珍　张焕乔　著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书从构造洛伦兹变换下不变作用量出发，由最小作用量原理导出基本运动方程. 先讲狭义相对论，然后讲电磁场理论，这样更容易阐述电磁场理论的协变性及系统性. 本书除讨论了静电学、静磁学、带电粒子在电磁场中的运动和运动的带电粒子产生的电磁场之外，还对电介质的色散、电磁波的辐射、电磁波的散射折射和衍射以及快速运动带电粒子与物质的相互作用等问题给出了较深入的讨论. 在每章后面都有例题，通过对例题的解答，一方面可以加深对于基本内容的理解，另一方面还可以学习一些解决实际问题的技巧.

本书可作为大学高年级学生、研究生的学习用书和科研工作者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

经典电动力学/张锡珍，张焕乔著. —北京：科学出版社, 2013. 10
（现代物理基础丛书; 58）
ISBN 978-7-03-038762-2

I. ①经… II. ①张… ②张… III. ①电动力学 IV. ①O442
中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 234131 号

责任编辑：钱 俊／责任校对：赵桂芬
责任印制：赵德静／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2013 年 10 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16
2013 年 10 月第一次印刷 印张: 15 3/4
字数: 303 000

定价: 78.00 元
(如有印装质量问题, 我社负责调换)

目　　录

第 1 章　引　　言

电磁现象的研究有很悠久的历史, 但直到 1771～1773 年 Cavendishe 实验确立了带电粒子之间相互作用的 $\dfrac{1}{r^2}$ 规律, 1875 年库仑确立了库仑定律 $\vec{F}=\dfrac{q_1 q_2 \vec{n}}{|\vec{r_1}-\vec{r_2}|^2}$ 以后, 才真正开始在世界范围内定量地研究电磁现象. 50 年后, 法拉第给出了磁场的变化与电流的关系. 直到 1864 年 Maxwell 在总结所有前人工作的基础上建立了 Maxwell 方程组并预言了电磁波的存在

$$\left(\overrightarrow{\nabla}^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi(\overrightarrow{X},t)=0, \tag{1.1}$$

$$\left(\overrightarrow{\nabla}^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\overrightarrow{A}(\overrightarrow{X},t)=0. \tag{1.2}$$

二十多年以后 (1888 年)Hertz 在实验上发现了以光速传播的横波 —— 电磁波, 最终确立了 Maxwell 电磁理论、即经典电动力学的正确性. 经典电动力学的确立在许多方面挑战了经典力学, 并最终导致了相对论力学的建立, 所以经典电动力学和狭义相对论是密不可分的. 另外经典电动力学的辐射理论不能正确解释黑体辐射的频谱分布, 此理论还给出了由于原子中的电子不断辐射能量而最终 “坍塌” 到原子核, 但实际上原子和分子是稳定的且辐射有谱线结构, 这些矛盾在推动量子力学建立的过程中起了关键性作用. 量子电动力学的发展使得电磁相互作用可用于描述高速微观世界. 20 世纪后期发展的标准模型 (夸克、轻子之间交换光子, 中间玻色子和胶子) 将弱、电、强相互作用在量子水平上给出了统一描述, 而经典电动力学和经典力学共同作为理论物理的一个重要环节仍然发挥着重要作用. 本书的讲述方法是从构造洛伦兹变换下不变作用量出发, 由最小作用量原理导出基本方程. 先讲狭义相对论, 然后讲电磁场理论, 这样更容易阐述电磁场理论的协变性质及系统性. 在本书中对电介质的色散、电磁波的辐射、电磁波在介质中的传播和散射以及快速运动带电粒子与物质的相互作用等物理问题讨论时, 我们总是首先对问题给出物理图像描述和数量级的估计, 然后再借助数学公式进行严格推导和计算, 这样才能抓住问题的物理本质, 也是做研究工作的基本方法.

另外在借助数学工具解决物理问题时, 强调解决问题的思路而不是只给出结果, 这有助于培养学习者的独立工作能力.

本书采用复欧几里得四维时空 $\begin{pmatrix} \vec{x} \\ x_4 = \mathrm{i}ct \end{pmatrix}$, 在表达式中出现下标相同暗指从 1 到 4 求和, 例如,

$$x_\mu x_\mu = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2t^2.$$

本书采用高斯单位制.

第 2 章　相对性原理

2.1　伽利略相对性原理

经典力学满足伽利略相对性原理, 即描述物体运动的牛顿定律在所有惯性系中是不变的, 或更一般的陈述为一切自然定律在所有惯性系中是等价的, 而不同惯性系之间满足伽利略变换:

$$\begin{aligned} \vec{X}' &= \vec{X} + \vec{V}t, \\ t' &= t. \end{aligned} \tag{2.1}$$

在 1900 年前后物理学的基本状况是:

(1) 伽利略相对性原理已经被确认为是物理学的基本原理.

(2) Maxwell 的电磁理论已被实验证实是正确的理论.

如此一来, 当时物理学存在的基本矛盾是: Maxwell 的电磁理论不满足伽利略相对性原理.

如果在 K 系中有自由电磁波的波动方程

$$\left(\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi(\vec{X}, t) = 0, \tag{2.2}$$

$$\left(\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A}(\vec{X}, t) = 0. \tag{2.3}$$

作伽利略变换 (2.1), 则在 K' 系 (K 系在 K' 系中以速度 $\vec{V}$ 运动) 中得到的方程为

$$\left({\vec{\nabla}'}^2 - \frac{1}{c^2}(\vec{V}\cdot\vec{\nabla}')\frac{\partial}{\partial t'} - \frac{1}{c^2}(\vec{V}\cdot\vec{\nabla}')(\vec{V}\cdot\vec{\nabla}') - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right)\phi = 0, \tag{2.4}$$

$$\left({\vec{\nabla}'}^2 - \frac{1}{c^2}(\vec{V}\cdot\vec{\nabla}')\frac{\partial}{\partial t'} - \frac{1}{c^2}(\vec{V}\cdot\vec{\nabla}')(\vec{V}\cdot\vec{\nabla}') - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right)\vec{A} = 0, \tag{2.5}$$

且找不到任何关于函数 ϕ, $\vec{A}$ 的变换使得方程能变化到在 K 系中的形式, 这与 Mexwell 电磁理论的基本方程相矛盾.

为解决这一基本矛盾可能有三条出路:

(1) 否定 Mexwell 的电磁理论.

(2) 伽利略相对性原理正确, 但 Mexwell 的电磁理论只在特定的惯性系 (以太静止的参照系, 以太是很轻的传播电磁波的介质) 中正确.

(3) 修改伽利略相对性原理, 使之既适用于经典力学, 又适用于 Mexwell 的电磁理论.

当时科学界的主流倾向于出路 (2), 即存在绝对静止的以太介质, 电磁波在静止以太介质中的传播速度为光速 c, 即 Mexwell 的电磁理论只在以太静止的惯性系中正确.

但迈克耳孙–莫雷实验以及后来的大量更精确的实验给出的结果是: 否定静止以太介质的存在!

2.2 爱因斯坦的相对性原理和洛伦兹变换

爱因斯坦采取了第三条可能的出路.

一切自然定律在所有惯性系中等价和光速在所有惯性系中是一个常数 c 是爱因斯坦的相对性原理的两个基本出发点.

这样一来, 不同的惯性系之间的时空变换不再是伽利略变换, 而是洛伦兹变换. 爱因斯坦的相对性原理导致经典力学的时空观要发生根本改变!

假定 K 系和 K' 系是两个惯性系, 在 K 系中有一光信号在 t_1 时刻从 $\overrightarrow{X}_1$ 出发, 以光速 c 传播, 在 t_2 时刻到达 $\overrightarrow{X}_2$. 以 K 系中的时钟和尺子度量时间和距离, 则有

$$(\overrightarrow{X}_2-\overrightarrow{X}_1)^2-c^2(t_2-t_1)^2=0.$$

如果在 K' 系中观测这同一过程, 则信号由 t'_1 时刻从 $\overrightarrow{X}'_1$ 出发, 以光速 c 传播在 t'_2 时刻到达 $\overrightarrow{X}'_2$. 以 K' 系中的时钟和尺子度量时间和距离, 则有

$$(\overrightarrow{X}'_2-\overrightarrow{X}'_1)^2-c^2(t'_2-t'_1)^2=0,$$

表明光速不依赖于参照系.

用假想的复四维空间中的一点 $\binom{\vec{X}}{\mathrm{i}ct}$ 表示一个事件, 前三个坐标 $\vec{X}$ 表示事件发生的地点, 第四个坐标中的 t 表示事件发生的时刻. 一个粒子在 t 时刻处在 $\vec{X}$ 地点这一事件在此四维空间中用一个世界点 $\binom{\vec{X}}{\mathrm{i}ct}$ 表示. 一个粒子的运动在此复四维空间中用一条世界线表示.

$$s_{12}=\{c^2(t_2-t_1)^2-(\overrightarrow{X}_2-\overrightarrow{X}_1)^2\}^{\frac{1}{2}}=\{-[(\overrightarrow{X}_2-\overrightarrow{X}_1)^2-c^2(t_2-t_1)^2]\}^{\frac{1}{2}}$$

称为两个事件之间的间隔. 而 $[(\overrightarrow{X}_2-\overrightarrow{X}_1)^2-c^2(t_2-t_1)^2]$ 是此复四维空间中两点距离的平方.

对于两个很靠近的事件, 它们之间的间隔为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{-((\mathrm{d}\overrightarrow{X})^2-c^2(\mathrm{d}t)^2)}.$$

由于光速不依赖于参照系, 若在一个惯性系 (K 系) 中 $\mathrm{d}s = 0$, 则在另一惯性系 (K' 系) 中一定有 $\mathrm{d}s' = 0$, 反之也成立. 所以 $\mathrm{d}s, \mathrm{d}s'$ 同为一阶无穷小量. 因此有 $(\mathrm{d}s)^2 = a(\mathrm{d}s')^2$.

由时空的均匀性可知 a 与 $\overrightarrow{X}$ 和 t 无关, 由空间的各向同性可以得出 $a(\vec{V}) = a(|\vec{V}|)$.

现在考虑三个惯性系 K 系, K_1 系和 K_2 系: K_1 系和 K_2 系分别在 K 系中以速度 $\vec{V}_1$ 和 $\vec{V}_2$ 运动, 则可得到

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{d}s)^2 = a(V_1)(\mathrm{d}s_1)^2, \\
&(\mathrm{d}s)^2 = a(V_2)(\mathrm{d}s_2)^2, \\
&(\mathrm{d}s_1)^2 = a(|\vec{V}_1 - \vec{V}_2|)(\mathrm{d}s_2)^2,
\end{aligned}
$$

这必然导致

$$
\frac{a(V_2)}{a(V_1)} = a(|\vec{V}_1 - \vec{V}_2|).
$$

要使此等式成立且又与 $\vec{V}_1$ 和 $\vec{V}_2$ 之间夹角无关的唯一可能是 $a = 1$. 因而得到

$$
(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}s')^2.
$$

对于有限的间隔有 $s = s'$.

由此得到重要结论:

光速在所有惯性系中是一常数必然导致两事件之间的间隔不随参照系改变, 或者等价地表述为光速在所有惯性系中是一常数必然导致复四维空间 $\binom{\overrightarrow{X}}{\mathrm{i}ct}$ 中两点之间的距离不变.

如果 $s_{12}^2 < 0$, 称两事件之间为类空间隔;

如果 $s_{12}^2 > 0$, 称两事件之间为类时间隔.

两事件之间的间隔是类空或类时的不依赖于参照系的选取. 两个事件之间只有是类时间隔时才可能有因果性, 因为任何信号的传播速度都等于或小于光速.

取事件 O 作为时间和空间的原点, 或等价地取它为复四维空间的坐标原点, 为方便起见这里空间坐标只取为一维 (图 2.1).

在直线 ab, cd 上

$$
x = \pm ct.
$$

首先考虑世界点在 aOc 区域内的事件. 显然在此区域内 $c^2t^2 - x^2 > 0$, 即任何点代表的事件与事件 O 之间的间隔是类时的. 而 $t > 0$ 表示, 相对于事件 O 此区域的世界点代表的事件是绝对未来.

同样的理由可知, 区域 bOd 中任何世界点代表的事件与事件 O 之间的间隔是类时的. 而 $t < 0$ 表示, 相对于事件 O 此区域的世界点代表的事件是绝对过去.

在区域 aOd 和 bOc 中任何世界点代表的事件与事件 O 之间的间隔是类空的.

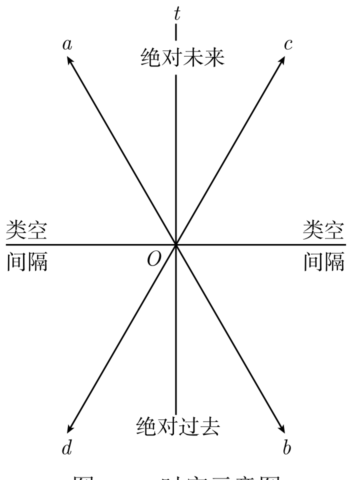


图 2.1 时空示意图

如果考虑四维空间, 则 $c^2t^2-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)=0$ 定义一个锥面, 称为光锥.

已经知道保持空间两点之间距离不变的变换是正交变换.

假定 K 系和 K' 系的原点重合. 在 K 系中有 $x_\mu=\binom{\overrightarrow{X}}{\mathrm{i}ct}$, 则在 K' 系中有

$$x'_\mu=a_{\mu\nu}x_\nu.$$

由到原点的距离是不变量

$$x'^2_\mu=x^2_\mu$$

给出

$$a_{\mu\nu}a_{\mu\nu'}=\delta_{\nu\nu'},\quad \text{即}\widetilde{a_{\nu\mu}}a_{\mu\nu'}=\delta_{\nu\nu'}.$$

令 $A=(a_{\mu\nu})$, 则 $\widetilde{A}A=I$, 所以 $\widetilde{A}=A^{-1}$, 即 A 为正交变换.

又因为 $\det(\widetilde{A}A)=\det(\widetilde{A})\cdot\det(A)=1$, 而 $\det(\widetilde{A})=\det(A)$, 由此可得

$$(\det(A))^2=1,$$

所以 $\det(A)=\pm1$.

变换前四维矢量 $\binom{\overrightarrow{X}}{\mathrm{i}ct}$, 变换后四维矢量 $x'_\mu=\binom{\overrightarrow{X}'}{\mathrm{i}ct'}$, 则要求

$$a_{\mu\nu}=\begin{cases}a_{ij},a_{44}, & \text{实数}\\ a_{4i},a_{i4}, & \text{纯虚数}\end{cases}$$

这种特殊的正交变换称为洛伦兹变换.

$\det(A)=1$, 称正常洛伦兹变换.

$\det(A) = -1$, 称反常洛伦兹变换.

下面只考虑 $a_{44} > 0$ 的正常洛伦兹变换.

首先讨论特殊情况下的洛伦兹变换.

当 K 系和 K' 系的轴彼此平行, 而 K 系在 K' 系中沿 1 轴以速度 V 运动时, 这种变换在四维空间中可视为 (x_1, x_4) 平面上的转动,

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \cos\psi - x_4 \sin\psi, \\ x_4' &= x_1 \sin\psi + x_4 \cos\psi, \\ x_2' &= x_2, \\ x_3' &= x_3. \end{aligned} \tag{2.6}$$

取 $x_1 = 0$ 作为 K 系的坐标原点, 则可得到

$$\frac{x_1'}{x_4'} = -\tan\psi, \quad \frac{x_1'}{\mathrm{i}ct'} = -\tan\psi = -\mathrm{i}\frac{V}{c}.$$

所以有

$$\begin{aligned} \tan\psi &= \mathrm{i}\frac{V}{c} = \mathrm{i}\beta, \\ \cos\psi &= \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} = \gamma, \\ \sin\psi &= \frac{\mathrm{i}\dfrac{V}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} = \mathrm{i}\beta\gamma. \end{aligned}$$

最终得到

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\mathrm{i}\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{i}\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

下面讨论一般情况下的洛伦兹变换的形式.

对无穷小洛伦兹变换有

$$x_\mu' = a_{\mu\nu} x_\nu, \quad a_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \epsilon_{\mu\nu}, \quad a_{\mu\nu} a_{\mu\nu'} = \delta_{\nu\nu'}.$$

由关系式

$$\begin{aligned} a_{\mu\nu} a_{\mu\nu'} =& (\delta_{\mu\nu} + \epsilon_{\mu\nu})(\delta_{\mu\nu'} + \epsilon_{\mu\nu'}) \\ =& \delta_{\mu\nu}\delta_{\mu\nu'} + \delta_{\mu\nu}\epsilon_{\mu\nu'} + \delta_{\mu\nu'}\epsilon_{\mu\nu} \\ =& \delta_{\nu\nu'} + \epsilon_{\nu\nu'} + \epsilon_{\nu'\nu} = \delta_{\nu\nu'}, \end{aligned}$$

得到

$$\epsilon_{\nu\nu'}+\epsilon_{\nu'\nu}=0,\quad 即\epsilon_{\mu\nu}=-\epsilon_{\nu\mu}.$$

所以 ϵ 是 4×4 的反对称矩阵. 它共有六个独立元素, 其中三个独立参数 ϵ_{ij} 确定两个三维坐标系的空间相对取向, 另外三个参数 ϵ_{4i} 则确定 K 系相对于 K' 系的运动速度.

全部正常洛伦兹变换构成洛伦兹群 (存在单位元素和逆元素, 满足封闭性和结合律). 此群有六个无穷小生成元, 它们的表示为

$$S_1=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad S_2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad S_3=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$K_1=\begin{pmatrix}0&0&0&-\mathrm{i}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\\mathrm{i}&0&0&0\end{pmatrix},\quad K_2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&-\mathrm{i}\\0&0&0&0\\0&\mathrm{i}&0&0\end{pmatrix},\quad K_3=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-\mathrm{i}\\0&0&i&0\end{pmatrix}.$$

这些无穷小生成元满足对易关系

$$[S_i,S_j]=\epsilon_{ijk}S_k, \tag{2.8}$$

$$[S_i,K_j]=\epsilon_{ijk}K_k, \tag{2.9}$$

$$[K_i,K_j]=-\epsilon_{ijk}S_k. \tag{2.10}$$

这里

$$\epsilon_{ijk}=\begin{cases}1, & \text{if}\quad \text{from }(ijk)\text{ to }(123)\quad\text{by}\quad\text{even}\quad\text{perm.},\\-1, & \text{if}\quad\text{from }(ijk)\text{ to }(123)\quad\text{by}\quad\text{odd}\quad\text{perm.},\\0, & \text{other}\quad\text{cases}\end{cases}$$

是三阶完全反对称单位张量, 它共有 27 个元素, 其中只有 6 个不为 0, 三个为 1, 三个为 -1.

容易验证洛伦兹群的六个无穷小生成元满足下列关系:

$$S_1^2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad S_2^2=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad S_3^2=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$K_1^2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad K_2^2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad K_3^2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

对易关系 (2.8) 表示 S_1, S_2 和 S_3 是三维空间中转动群的三个无穷小生成元. 对易关系 (2.9) 表示在空间转动下 K 像三维矢量一样变换. 对易关系 (2.10) 表示在不同方向的递升 (boost) 彼此不对易.

无穷小生成元 K_1, K_2 和 K_3 有下列性质:

令 $\overrightarrow{\epsilon}$ 是任意单位矢量, 则

$$\overrightarrow{\epsilon}\cdot\overrightarrow{K}=\begin{pmatrix}0&0&0&-\mathrm{i}\epsilon_1\\0&0&0&-\mathrm{i}\epsilon_2\\0&0&0&-\mathrm{i}\epsilon_3\\\mathrm{i}\epsilon_1&\mathrm{i}\epsilon_2&\mathrm{i}\epsilon_3&0\end{pmatrix},\quad (\overrightarrow{\epsilon}\cdot\overrightarrow{K})^2=\begin{pmatrix}\epsilon_1^2&\epsilon_1\epsilon_2&\epsilon_1\epsilon_3&0\\\epsilon_1\epsilon_2&\epsilon_2^2&\epsilon_2\epsilon_3&0\\\epsilon_1\epsilon_3&\epsilon_2\epsilon_3&\epsilon_3^2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$(\overrightarrow{\epsilon}\cdot\overrightarrow{K})^3=\overrightarrow{\epsilon}\cdot\overrightarrow{K}.$$

假定: K 系和 K' 系的三个空间坐标轴已经分别平行, 而 K 系在 K' 系中以速度 $\overrightarrow{V}$ 运动. 令

$$\overrightarrow{\beta}=\frac{\overrightarrow{V}}{c},\quad \overrightarrow{\epsilon}=\frac{\overrightarrow{\beta}}{\beta},\quad \xi=\operatorname{ar\,tanh}(\beta)$$

(所以有 $\tanh\xi=\beta,\cosh\xi=\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},\sinh\xi=\beta\gamma$). 则洛伦兹变换的递升矩阵的一般形式可表示为

$$\begin{aligned}A(\overrightarrow{\beta})=&\mathrm{e}^{\zeta\overrightarrow{\epsilon}\cdot\overrightarrow{K}}=I+\left(\xi+\frac{1}{3!}\xi^3+\cdots\right)\overrightarrow{\epsilon}\cdot\overrightarrow{K}+\left(\frac{\xi^2}{2!}+\frac{\xi^4}{4!}+\cdots\right)(\overrightarrow{\epsilon}\cdot\overrightarrow{K})^2\\=&I+\sinh\xi\,\overrightarrow{\epsilon}\cdot\overrightarrow{K}+(\cosh\xi-1)(\overrightarrow{\epsilon}\cdot\overrightarrow{K})^2\\=&\begin{pmatrix}1+\dfrac{(\gamma-1)\beta_1^2}{\beta^2}&\dfrac{(\gamma-1)\beta_1\beta_2}{\beta^2}&\dfrac{(\gamma-1)\beta_1\beta_3}{\beta^2}&-\mathrm{i}\beta_1\gamma\\\dfrac{(\gamma-1)\beta_2\beta_1}{\beta^2}&1+\dfrac{(\gamma-1)\beta_2^2}{\beta^2}&\dfrac{(\gamma-1)\beta_2\beta_3}{\beta^2}&-\mathrm{i}\beta_2\gamma\\\dfrac{(\gamma-1)\beta_3\beta_1}{\beta^2}&\dfrac{(\gamma-1)\beta_3\beta_2}{\beta^2}&1+\dfrac{(\gamma-1)\beta_3^2}{\beta^2}&-\mathrm{i}\beta_3\gamma\\\mathrm{i}\beta_1\gamma&\mathrm{i}\beta_2\gamma&\mathrm{i}\beta_3\gamma&\gamma\end{pmatrix},\end{aligned}$$

这里 $\overrightarrow{\xi}=\xi\overrightarrow{\epsilon}$ 称为递升矢量.

对这种洛伦兹变换有

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\dfrac{(\gamma-1)\beta_1^2}{\beta^2} & \dfrac{(\gamma-1)\beta_1\beta_2}{\beta^2} & \dfrac{(\gamma-1)\beta_1\beta_3}{\beta^2} & -\mathrm{i}\beta_1\gamma \\ \dfrac{(\gamma-1)\beta_2\beta_1}{\beta^2} & 1+\dfrac{(\gamma-1)\beta_2^2}{\beta^2} & \dfrac{(\gamma-1)\beta_2\beta_3}{\beta^2} & -\mathrm{i}\beta_2\gamma \\ \dfrac{(\gamma-1)\beta_3\beta_1}{\beta^2} & \dfrac{(\gamma-1)\beta_3\beta_2}{\beta^2} & 1+\dfrac{(\gamma-1)\beta_3^2}{\beta^2} & -\mathrm{i}\beta_3\gamma \\ \mathrm{i}\beta_1\gamma & \mathrm{i}\beta_2\gamma & \mathrm{i}\beta_3\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

当运动速度沿 1 轴 ($\beta_2 = \beta_3 = 0, \beta = \beta_1$) 时, 则式 (2.11) 简化为特殊情况下的洛伦兹变换公式 (2.7).

光速在所有的惯性系是一个常数导致了不同的惯性系之间已不再是伽利略变换, 而是洛伦兹变换. 这将导致时空观的深刻变化. 下面用洛伦兹变换公式 (2.7) 讨论等时性, 时间延展和长度的洛伦兹收缩.

K 系在 K' 系中沿 1 轴以速度 V 运动, 由洛伦兹变换公式可得

$$\begin{aligned} x_1' &= \gamma(x_1 + Vt), &(1)\\ x_2' &= x_2, \\ x_3' &= x_3, \\ t' &= \gamma\left(t + \frac{Vx_1}{c^2}\right), &(2) \end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned} x_1 &= \gamma(x_1' - Vt'), &(3)\\ x_2 &= x_2', \\ x_3 &= x_3', \\ t &= \gamma\left(t' - \frac{Vx_1'}{c^2}\right). &(4) \end{aligned}$$

等时性

在 K 系放两个时钟, 可假定第一个在原点, 第二个在 1 轴的 $x_1 = x$ 的地方, 并调整两个钟等时.

在 K' 系中观测时间, 第一个钟的读数为 t_1', 第二个钟的读数为 t_2' 则 $t_2' - t_1' = \gamma\dfrac{Vx}{c^2}$, 即两个时钟不等时.

时间延展

在 K 系中观测, 一时钟放在原点 ($x_1 = 0$) 不动, 时间间隔为 Δt, 则由 (2) 式可得 $\Delta t' = \gamma\Delta t$, 即运动的时钟时间变慢.

长度的洛伦兹收缩

在 K 系中有一尺子, 长度为 $\Delta x = x_2 - x_1$, 则在 K' 系中在同一时刻 t' 观测尺子长度为 $\Delta x' = x_2' - x_1'$. 由 (3) 式 $\Delta x = \gamma \Delta x'$, 得 $\Delta x' = \dfrac{1}{\gamma}\Delta x$, 即运动的尺子其长度变短 —— 洛伦兹收缩. 这种时间延展和长度的洛伦兹收缩已经为大量实验事实所证实.

下面讨论在洛伦兹变换下三维速度的变换.

假定 K 系在 K' 系沿 1 轴以速度 V 运动, 洛伦兹变换为

$$x_1' = \frac{x_1 + Vt}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3, \quad t' = \frac{t + \dfrac{Vx_1}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}},$$

由此可得

$$\mathrm{d}x_1' = \frac{\mathrm{d}x_1 + V\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} = \frac{u_1 + V}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}\mathrm{d}t,$$

$$\mathrm{d}t' = \frac{\mathrm{d}t + Vu_1\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} = \frac{1 + \dfrac{V}{c^2}u_1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}\mathrm{d}t.$$

最终得到三维速度的变换关系为

$$u_1' = \frac{\mathrm{d}x_1'}{\mathrm{d}t'} = \frac{u_1 + V}{1 + \dfrac{V}{c^2}u_1},$$

$$u_2' = \frac{\mathrm{d}x_2'}{\mathrm{d}t'} = \frac{u_2\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}{1 + \dfrac{V}{c^2}u_1},$$

$$u_3' = \frac{\mathrm{d}x_3'}{\mathrm{d}t'} = \frac{u_3\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}{1 + \dfrac{V}{c^2}u_1}. \tag{2.12}$$

由三维速度的变换关系可得结论：在任意参照系中速度小于光速!

令在 K 系中 $u_2 = u_3 = 0, u = u_1$, 则 $u' = \dfrac{u + V}{1 + \dfrac{V}{c^2}u_1}$.

如果 $u \leqslant c, V \leqslant c$, 则有

$$1 - \frac{u'}{c} = \frac{1 + \dfrac{Vu}{c^2} - \dfrac{u}{c} - \dfrac{V}{c}}{1 + \dfrac{V}{c^2}u_1} = \frac{\left(1 - \dfrac{u}{c}\right)\left(1 - \dfrac{V}{c}\right)}{1 + \dfrac{V}{c^2}u_1} \geqslant 0,$$

因此 $\dfrac{u'}{c} \leqslant 1$.

2.3 四维速度和四维加速度

首先定义洛伦兹变换下的标量、矢量和张量.

在洛伦兹变换下 $x'_\mu = a_{\mu\nu}x_\nu$, 如果 $\Phi^{'}(x') = \Phi(x)$, 则 $\Phi(x)$ 称为洛伦兹变换下的标量, 如果 $A'_\mu(x') = a_{\mu\nu}A_\nu(x)$, 则 $A_\nu(x)$ 称为洛伦兹变换下的矢量, 如果 $F'_{\mu\nu}(x') = a_{\mu\alpha}a_{\nu\beta}F_{\alpha\beta}(x)$, 即对每一列都像矢量一样变换, 则 $F_{\alpha\beta}(x)$ 称为洛伦兹变换下的二阶张量.

例如, 无穷小间隔

$$\mathrm{d}s = \sqrt{-(\mathrm{d}x_\mu)^2} = \sqrt{(c\mathrm{d}t)^2 - (\mathrm{d}\,\overrightarrow{x})^2} = c\mathrm{d}t\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$$

是洛伦兹变换下的标量. 因为

$$(\mathrm{d}x'_\mu)^2 = a_{\mu\alpha}a_{\mu\beta}(\mathrm{d}x_\alpha)(\mathrm{d}x_\beta) = \delta_{\alpha\beta}(\mathrm{d}x_\alpha)(\mathrm{d}x_\beta) = (\mathrm{d}x_\mu)^2.$$

而四维速度

$$u_\mu = \frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{c\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\mathrm{d}\,\overrightarrow{x}\\ \mathrm{i}c\mathrm{d}t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{\overrightarrow{V}}{c\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\\ \mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\end{pmatrix} \tag{2.13}$$

和四维加速度

$$w_\mu = \frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}}{c\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\dfrac{\overrightarrow{V}}{c\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\\ \mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{c^2\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)^2}\begin{pmatrix}\dfrac{(\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{V})\overrightarrow{V}}{c^2} + \overrightarrow{w}\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)\\ \mathrm{i}\dfrac{(\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{V})}{c}\end{pmatrix} \tag{2.14}$$

都是洛伦兹变换下的矢量, 这里 $\vec{w}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t}$ 是三维加速度.

四维速度和四维加速度满足 $u\cdot w=u_\mu w_\mu=0$.

证明: 因为 $u_\mu^2=\vec{u}^2-u_0^2=\dfrac{V^2}{c^2\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)}-\dfrac{1}{1-\dfrac{V^2}{c^2}}=-1$,

所以 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}u_\mu^2=2u_\mu w_\mu=0$, 即四维速度和四维加速度彼此正交.

对于任意洛伦兹变换下的矢量 A_μ, 容易证明 $A_\mu^2=A_1^2+A_2^2+A_3^2+A_4^2$ 是洛伦兹变换下的不变量.

如果 $A_\mu^2>0$, 则称 A_μ 为类空矢量; 如果 $A_\mu^2<0$, 则称 A_μ 为类时矢量.

很明显一个矢量的类空或类时特征在洛伦兹变换下是不变的.

2.4 四维空间中的高斯定理和斯托克斯定理

在三维空间中可有体积分、面积分和线积分. 体积分的积分元为 $\mathrm{d}V$, 线积分的积分元为 $\mathrm{d}x_i$, 在 (j,k) 平面上的矢量 $\mathrm{d}\vec{x},\mathrm{d}\vec{x}'$ 所构成的平行四边形的面积元为

$$\mathrm{d}f_{jk}=\begin{vmatrix}\mathrm{d}x_j & \mathrm{d}x_j' \\ \mathrm{d}x_k & \mathrm{d}x_k'\end{vmatrix},$$

它是二阶反对称张量, 可方便地用矢量 $\mathrm{d}S_i=\dfrac{1}{2}\epsilon_{ijk}\mathrm{d}f_{jk}$ 表示此面积分的积分元.

三维空间的高斯定理可通过代换 $\mathrm{d}S_i\longrightarrow \mathrm{d}V\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ 得到, 如矢量的面积分

$$\oint A_i\mathrm{d}S_i=\int\frac{\partial A_i}{\partial x_i}\mathrm{d}V. \tag{2.15}$$

斯托克斯定理可通过代换 $\mathrm{d}x_i\to\epsilon_{ijk}\mathrm{d}S_j\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ 得到, 例如

$$\begin{aligned}\oint\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}=\oint A_i\mathrm{d}x_i&=\int\epsilon_{ijk}\mathrm{d}S_j\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\\&=\int\mathrm{d}S_j\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_k}-\frac{\partial A_k}{\partial x_j}\right)=\int\mathrm{d}\vec{S}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}).\end{aligned} \tag{2.16}$$

在四维复欧几里得空间中, 可以定义一个四阶完全反对称单位张量

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}=\begin{cases}1, & \text{if from } \alpha\beta\gamma\delta \text{ to } 1234 \text{ by even perm.},\\ -1, & \text{if from } \alpha\beta\gamma\delta \text{ to } 1234 \text{ by odd perm.},\\ 0, & \text{other cases.}\end{cases}$$

在四维复欧几里得空间中, 线积分的积分元为 $\mathrm{d}x_\alpha$.

二维面积分的积分元 $\mathrm{d}f_{\alpha\beta} = \mathrm{d}x_\alpha \mathrm{d}x'_\beta - \mathrm{d}x_\beta \mathrm{d}x'_\alpha$, 还可定义一个与它对偶的反对称张量 $\mathrm{d}f^*_{\alpha\beta} = \dfrac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\mathrm{d}f_{\gamma\delta}$.

在三维超面上积分的积分元为

$$\mathrm{d}S_{\beta\gamma\delta} = \begin{vmatrix} \mathrm{d}x_\beta & \mathrm{d}x'_\beta & \mathrm{d}x''_\beta \\ \mathrm{d}x_\gamma & \mathrm{d}x'_\gamma & \mathrm{d}x''_\gamma \\ \mathrm{d}x_\delta & \mathrm{d}x'_\delta & \mathrm{d}x''_\delta \end{vmatrix},$$

可方便地用矢量 $\mathrm{d}S_\alpha = \dfrac{1}{6}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\mathrm{d}S_{\beta\gamma\delta}$ 表示此三维超面上的积分元.

四维空间的体积分的积分元为 $\mathrm{d}\Omega = c\mathrm{d}t\mathrm{d}V$.

在这些表达式中略去了 $x_4 = \mathrm{i}ct$ 中的 i.

由代换 $\mathrm{d}S_\alpha \longrightarrow \mathrm{d}\Omega\dfrac{\partial}{\partial x_\alpha}$, 可得到四维空间推广的高斯定理

$$\oint A_\mu \mathrm{d}S_\mu = \int \frac{\partial A_\mu}{\partial X_\mu}\mathrm{d}\Omega. \tag{2.17}$$

由代换 $\mathrm{d}f^*_{\mu\nu} \to \mathrm{d}S_\mu\dfrac{\partial}{\partial x_\nu} - \mathrm{d}S_\nu\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$ 可将二维曲面上的积分与三维超面上的积分联系起来, 如二阶反对称张量的二维积分

$$\frac{1}{2}\int A_{\mu\nu}\mathrm{d}f^*_{\mu\nu} = \int \mathrm{d}S_\mu \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}.$$

由代换 $\mathrm{d}x_\mu \longrightarrow \mathrm{d}f_{\mu\nu}\dfrac{\partial}{\partial x_\nu}$ 可以得到四维空间中推广的斯托克斯定理

$$\oint A_\mu \mathrm{d}x_\mu = \int \mathrm{d}f_{\mu\nu}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}f_{\mu\nu}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}\right). \tag{2.18}$$

2.5 例 题

例题 2.1 μ 轻子的衰变

$$\mu^- \longrightarrow e^- + \nu_\mu + \overline{\nu}_e \qquad (\mu^+ \longrightarrow e^+ + \overline{\nu}_\mu + \nu_e).$$

我们知道 μ 轻子在 10~20km 的高空产生. 对于静止的 μ 轻子 ($m_\mu = 105\mathrm{MeV}$), 其寿命为 $\tau_0 = 2.197134 \times 10^{-6}\mathrm{s}$, 由此得到它的平均自由程最大为 $\tau_0 c \sim 0.66\mathrm{km}$, 即到达不了地球表面就衰变完了, 但实际上在地球表面观测到了很多 μ 轻子, 为什么?

解　其原因是在高空产生的高能 μ 轻子的能量约为 2GeV. 此高能 μ 轻子的寿命 $\tau=\gamma\tau_0$ $(\gamma\sim 20)$, 则平均自由程 $\tau c\sim 13\text{km}$, 所以在地面上仍然可以观测到 μ 轻子.

此现象也可以用另一种方式来解释.

在跟随 μ 轻子一起运动的参照系中来观测, 这时寿命为 $\tau_0=2.197134\times10^{-6}\text{s}$, 平均自由程为 $\tau_0 c\sim 0.66\text{km}$, 但在地球上观测的 10km 距离, 在此跟随 μ 轻子一起运动的参照系中观测只有 $10\sqrt{1-\beta^2}\sim 0.5\text{km}$, 因此在地球表面可观测到 μ 轻子.

例题 2.2　试证明 $\delta_{\mu\nu}$ 和 $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 在洛伦兹变换下是二阶和四阶不变张量.

证明　$a_{\alpha\xi}a_{\beta\zeta}\delta_{\xi\zeta}=a_{\alpha\xi}a_{\beta\xi}=\delta_{\alpha\beta}$, 所以 $\delta_{\mu\nu}$ 是二阶不变张量.

完全反对称单位张量 $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 的行列式表示为

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}=\begin{vmatrix}\delta^1_\alpha & \delta^1_\beta & \delta^1_\gamma & \delta^1_\delta\\ \delta^2_\alpha & \delta^2_\beta & \delta^2_\gamma & \delta^2_\delta\\ \delta^3_\alpha & \delta^3_\beta & \delta^3_\gamma & \delta^3_\delta\\ \delta^4_\alpha & \delta^4_\beta & \delta^4_\gamma & \delta^4_\delta\end{vmatrix},$$

则有

$$\begin{aligned}a_{\mu\alpha}a_{\nu\beta}a_{\xi\gamma}a_{\eta\delta}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}=&a_{\mu\alpha}a_{\nu\beta}a_{\xi\gamma}a_{\eta\delta}\begin{vmatrix}\delta^1_\alpha & \delta^1_\beta & \delta^1_\gamma & \delta^1_\delta\\ \delta^2_\alpha & \delta^2_\beta & \delta^2_\gamma & \delta^2_\delta\\ \delta^3_\alpha & \delta^3_\beta & \delta^3_\gamma & \delta^3_\delta\\ \delta^4_\alpha & \delta^4_\beta & \delta^4_\gamma & \delta^4_\delta\end{vmatrix}\\ =&\begin{vmatrix}a_{\mu1} & a_{\nu1} & a_{\xi1} & a_{\eta1}\\ a_{\mu2} & a_{\nu2} & a_{\xi2} & a_{\eta2}\\ a_{\mu3} & a_{\nu3} & a_{\xi3} & a_{\eta3}\\ a_{\mu4} & a_{\nu4} & a_{\xi4} & a_{\eta4}\end{vmatrix}=\epsilon_{\mu\nu\xi\eta},\end{aligned}$$

所以 $\epsilon_{\mu\nu\xi\eta}$ 是四阶不变张量.

例题 2.3　连续实施递升参数为 $\overrightarrow{\beta}$ 和递升参数为 $\delta\overrightarrow{\beta}$ 的操作不等于直接实施递升参数为 $(\overrightarrow{\beta}+\delta\overrightarrow{\beta})$ 的操作.

令 $A_T=A(\overrightarrow{\beta}+\delta\overrightarrow{\beta})A^{-1}(\overrightarrow{\beta})$, 试证明, 精确到 $\delta\overrightarrow{\beta}$ 项

$$\begin{aligned}&A_T=A(\Delta\overrightarrow{\beta})R(\Delta\overrightarrow{\Omega})=R(\Delta\overrightarrow{\Omega})A(\Delta\overrightarrow{\beta}),\\ &R(\Delta\overrightarrow{\Omega})=I-\Delta\overrightarrow{\Omega}\cdot\overrightarrow{S},\\ &A(\Delta\overrightarrow{\beta})=I+\Delta\overrightarrow{\beta}\cdot\overrightarrow{K},\end{aligned}$$

其中

$$\Delta\overrightarrow{\Omega} = -\frac{(\gamma-1)}{\beta^2}(\overrightarrow{\beta}\times\delta\overrightarrow{\beta}),$$
$$\Delta\overrightarrow{\beta} = (\gamma^2\delta\overrightarrow{\beta}_{/\!/} + \gamma\delta\overrightarrow{\beta}_{\perp}).$$

证明　精确到 $\delta\overrightarrow{\beta}$ 的首阶, 有

$$A(\overrightarrow{\beta}+\delta\overrightarrow{\beta}) = \begin{pmatrix} \gamma+\gamma^3\beta\delta\beta_1 & \dfrac{(\gamma-1)}{\beta}\delta\beta_2 & 0 & -\mathrm{i}(\beta\gamma+\gamma^3\delta\beta_1) \\ \dfrac{(\gamma-1)}{\beta}\delta\beta_2 & 1 & 0 & -\mathrm{i}\gamma\delta\beta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{i}(\beta\gamma+\gamma^3\delta\beta_1) & \mathrm{i}\gamma\delta\beta_2 & 0 & \gamma+\gamma^3\beta\delta\beta_1 \end{pmatrix},$$

则

$$\begin{aligned} A_T &= A(\overrightarrow{\beta}+\delta\overrightarrow{\beta})A^{-1}(\overrightarrow{\beta}) = A(\overrightarrow{\beta}+\delta\overrightarrow{\beta})A(\overrightarrow{-\beta}) \\ &= \begin{pmatrix} \gamma+\gamma^3\beta\delta\beta_1 & \dfrac{(\gamma-1)}{\beta}\delta\beta_2 & 0 & -\mathrm{i}(\beta\gamma+\gamma^3\delta\beta_1) \\ \dfrac{(\gamma-1)}{\beta}\delta\beta_2 & 1 & 0 & -\mathrm{i}\gamma\delta\beta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{i}(\beta\gamma+\gamma^3\delta\beta_1) & \mathrm{i}\gamma\delta\beta_2 & 0 & \gamma+\gamma^3\beta\delta\beta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \mathrm{i}\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{i}\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{(\gamma-1)}{\beta}\delta\beta_2 & 0 & -\mathrm{i}\gamma^2\delta\beta_1 \\ -\dfrac{(\gamma-1)}{\beta}\delta\beta_2 & 1 & 0 & -\mathrm{i}\gamma\delta\beta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{i}\gamma^2\delta\beta_1 & \mathrm{i}\gamma\delta\beta_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

借助 $\overrightarrow{S}$ 和 $\overrightarrow{K}$ 的形式, 有

$$A_T = I - \frac{(\gamma-1)}{\beta^2}(\overrightarrow{\beta}\times\delta\overrightarrow{\beta})\cdot\overrightarrow{S} + (\gamma^2\delta\overrightarrow{\beta}_{/\!/} + \gamma\delta\overrightarrow{\beta}_{\perp})\cdot\overrightarrow{K}.$$

令

$$\Delta\overrightarrow{\Omega} = -\frac{(\gamma-1)}{\beta^2}(\overrightarrow{\beta}\times\delta\overrightarrow{\beta}), \quad \Delta\overrightarrow{\beta} = (\gamma^2\delta\overrightarrow{\beta}_{/\!/} + \gamma\delta\overrightarrow{\beta}_{\perp}),$$

所以精确到 $\delta\overrightarrow{\beta}$ 项可以得到

$$A_T = A(\Delta\overrightarrow{\beta})R(\Delta\overrightarrow{\Omega}) = R(\Delta\overrightarrow{\Omega})A(\Delta\overrightarrow{\beta}),$$
$$R(\Delta\overrightarrow{\Omega}) = I - \Delta\overrightarrow{\Omega}\cdot\overrightarrow{S},$$
$$A(\Delta\overrightarrow{\beta}) = I + \Delta\overrightarrow{\beta}\cdot\overrightarrow{K}.$$

定义

$$\vec{\omega}_T = -\lim_{\delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\Omega}}{\delta t} = \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{\vec{a} \times \vec{V}}{c^2},$$

此结果的物理意义是：粒子的瞬时速度为零的参照系以转动角速度 $\vec{\omega}_T$ 转动，这里 $\vec{V}$ 和 $\vec{a}$ 是粒子在实验室系中的速度和加速度.

第 3 章　相对论力学

3.1　分析力学简介

运动方程的拉格朗日形式

假定力学系统的拉格朗日量为

$$L = L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha), \quad \alpha = 1, 2, \cdots, n,$$

其中 q_α 是广义坐标, $\dot{q}_\alpha$ 是广义速度.

作用量 $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t))\mathrm{d}t$ 是 $q_\alpha(t)$ 和 $\dot{q}_\alpha(t)$ 的泛函. 则由最小作用量原理 $\delta S = 0$ 可得拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \cdots, n, \tag{3.1}$$

拉格朗日方程 (3.1) 推导如下：

$$\begin{aligned}\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t))\mathrm{d}t =& \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta \dot{q}_\alpha\right)\mathrm{d}t \\ =& \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\delta q_\alpha \mathrm{d}t = 0,\end{aligned}$$

因 $\delta q_\alpha(t_1) = \delta q_\alpha(t_2) = 0$, 而 $\delta q_\alpha(t)$ 是任意的, 所以得到拉格朗日方程 (3.1).

运动方程的正则形式

定义广义动量 $p_\alpha = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$, 则哈密顿量为

$$H(q_\alpha, p_\alpha) = \sum_\alpha p_\alpha \dot{q}_\alpha - L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha).$$

那么正则运动方程为

$$\begin{aligned}\dot{p}_\alpha =& -\left.\frac{\partial H(q_\alpha, p_\alpha)}{\partial q_\alpha}\right|_{p_\alpha}, \\ \dot{q}_\alpha =& \left.\frac{\partial H(q_\alpha, p_\alpha)}{\partial p_\alpha}\right|_{q_\alpha}.\end{aligned} \tag{3.2}$$

推导如下:

由拉格朗日方程 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}-\dfrac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0$ 可得 $\dot{p}_\alpha=\dfrac{\partial L}{\partial q_\alpha}$.

由 $\left.\dfrac{\partial H(q_\alpha,p_\alpha)}{\partial q_\alpha}\right|_{p_\alpha}=p_{\alpha'}\dfrac{\partial \dot{q}_{\alpha'}}{\partial q_\alpha}-\dfrac{\partial L}{\partial q_\alpha}-\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha'}}\dfrac{\partial \dot{q}_{\alpha'}}{\partial q_\alpha}=-\dfrac{\partial L}{\partial q_\alpha}$, 得到

$$\dot{p}_\alpha=-\left.\frac{\partial H(q_\alpha,p_\alpha)}{\partial q_\alpha}\right|_{p_\alpha},$$

又因 $\left.\dfrac{\partial H(q_\alpha,p_\alpha)}{\partial p_\alpha}\right|_{q_\alpha}=\dot{q}_\alpha+p_{\alpha'}\dfrac{\partial \dot{q}_{\alpha'}}{\partial p_\alpha}-\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha'}}\dfrac{\partial \dot{q}_{\alpha'}}{\partial p_\alpha}=\dot{q}_\alpha$, 所以

$$\left.\frac{\partial H(q_\alpha,p_\alpha)}{\partial p_\alpha}\right|_{q_\alpha}=\dot{q}_\alpha.$$

正则运动方程的另一推导

由 $S=\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}L(q,\dot{q})\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\{p\dot{q}-H(q,p)\}\mathrm{d}t$, 则可得到

$$\begin{aligned}\delta S=&\int_{t_1}^{t_2}\left\{\delta p\dot{q}+p\delta\dot{q}-\frac{\partial H}{\partial p}\delta p-\frac{\partial H}{\partial q}\delta q\right\}\mathrm{d}t\\=&p\delta q|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\left\{\left(\dot{q}-\frac{\partial H}{\partial p}\right)\delta p-\left(\dot{p}+\frac{\partial H}{\partial q}\right)\delta q\right\}\mathrm{d}t=0,\end{aligned}$$

因为 $\delta p,\delta q$ 是任意的, 所以有正则运动方程 (3.2).

如果系统的哈密顿不显含时间 $H(q(t),p(t))$, 则

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial q}\dot{q}+\frac{\partial H}{\partial p}\dot{p}=\frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p}-\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q}=0,$$

即 H 是守恒量.

如果任意力学量 $A(q(t),p(t))$ 不显含时间 t, 则

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial A}{\partial q}\dot{q}+\frac{\partial A}{\partial p}\dot{p}=\frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p}-\frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q}=\{A,H\},$$

其中 $\{A,H\}$ 称为 A,H 的泊松括号.

力学量 A,B 的泊松括号定义为

$$\{A,B\}=\frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial B}{\partial p}-\frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial B}{\partial q}.$$

特例

$$\{q_\alpha,p_\beta\}=\delta_{\alpha\beta},\quad \{q_\alpha,q_\beta\}=\{p_\alpha,p_\beta\}=0.$$

如选取 $q(t)$ 满足拉格朗日方程, 定义

$$S = S(q(t), t) = \int_{t_1}^{t} L(q_\alpha(t'), \dot{q}_\alpha(t'))\mathrm{d}t',$$

则 S 是积分上限 t 的函数.

由 $\delta S = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha|_{t_1}^{t} = p_\alpha \delta q_\alpha(t)$ 得到 $\dfrac{\partial S}{\partial q_\alpha} = p_\alpha$.

因为 $S = S(q(t), t)$, 所以

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = L = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t},$$

即 $\dfrac{\partial S}{\partial t} = L - p\dot{q} = -H(q, p)$.

又由 $\dfrac{\partial S}{\partial q_\alpha} = p_\alpha$, 得到 $S(q, t)$ 满足哈密顿–雅可比方程

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H\left(q_\alpha, \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}, t\right). \tag{3.3}$$

如 H 不显含时间 t, 则哈密顿–雅可比方程的解为

$$S(q, t) = S_0(q) + f(t), \quad \dot{f}(t) = -H\left(q, \frac{\partial S_0}{\partial q}\right) = -E,$$

所以 $S(q, t) = S_0(q) - Et$, 这里 E 是系统的总能量, 它是守恒量, 而 $S_0(q)$ 满足方程 $H\left(q, \dfrac{\partial S_0}{\partial q}\right) = E$.

3.2 相对论性自由粒子动力学

作用量

$$S = \alpha \int_a^b \mathrm{d}s = \alpha c \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\mathrm{d}t$$

是洛伦兹变换下的标量, 这里 a, b 是两个世界点而积分是沿着粒子的假想世界线进行的.

由此可知自由粒子的拉格朗日量为

$$L = \alpha c\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

对于低速运动的粒子 $V \ll c$, 有 $\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}} \approx 1 - \dfrac{V^2}{2c^2}$, 由此可得

$$L \approx \alpha c - \frac{\alpha}{2c}V^2.$$

而对一个非相对论自由粒子已知 $L=\dfrac{m}{2}V^2$, 由此可得 $\alpha=-mc$, 所以对于相对论自由粒子有

$$L=-mc^2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}.$$

由拉格朗日量 L 得到相对论性自由粒子的拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m\overrightarrow{V}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\right)=0. \tag{3.4}$$

定义正则动量 $\overrightarrow{p}=\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\overrightarrow{X}}}=\dfrac{m\overrightarrow{V}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}$, 则哈密顿量为

$$\begin{aligned}H=&\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{V}-L\\=&\frac{m\overrightarrow{V}^2}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}+mc^2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}},\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{p}^2+m^2c^2=&\frac{m^2V^2}{1-\dfrac{V^2}{c^2}}+m^2c^2\\=&\frac{m^2c^2}{1-\dfrac{V^2}{c^2}}=\frac{E^2}{c^2},\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}E=&c\sqrt{\overrightarrow{p}^2+m^2c^2}=H,\\\overrightarrow{p}=&E\frac{\overrightarrow{V}}{c^2}.\end{aligned}$$

由 H 的形式得到自由粒子运动方程的正则形式为

$$\begin{aligned}\dot{\overrightarrow{X}}&=\frac{\partial H}{\partial\overrightarrow{p}}=\frac{c^2\overrightarrow{p}}{E}=\overrightarrow{V},\\\dot{\overrightarrow{p}}&=\frac{\partial H}{\partial\overrightarrow{X}}=0.\end{aligned} \tag{3.5}$$

自由粒子运动方程的另一推导

因为

$$S = -mc\int_a^b \mathrm{d}s = -mc\int_a^b \sqrt{-(\mathrm{d}X_\mu)^2},$$

由 $\delta S = 0$ 可得

$$\begin{aligned}-m\int_a^b \frac{-2\mathrm{d}X_\mu \mathrm{d}\delta X_\mu}{2\sqrt{-(\mathrm{d}X_\mu)^2}} =& mc\int_a^b \frac{\mathrm{d}X_\mu}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}\delta X_\mu \\ =& - mcu_\mu \delta X_\mu|_a^b - \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(mu_\mu)\delta X_\mu \mathrm{d}s = 0.\end{aligned}$$

因为 $\delta X_\mu|_a = \delta X_\mu|_b = 0$, 所以得到自由粒子的运动方程

$$\frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}s} = 0.$$

若 $\delta X_\mu|_a = 0$, $\delta X_\mu|_b$ 可变而粒子轨道满足运动方程, 则对自由粒子得到

$$\frac{\partial S}{\partial X_\mu} = mcu_\mu = \begin{pmatrix} p \\ \mathrm{i}\dfrac{E}{c} \end{pmatrix}.$$

由分析力学已知

$$\overrightarrow{p} = \frac{\partial S}{\partial \overrightarrow{X}}, \quad E = -\frac{\partial S}{\partial t},$$

则直接代入也可得到同样形式

$$\frac{\partial S}{\partial X_\mu} = \begin{pmatrix} p \\ \mathrm{i}\dfrac{E}{c} \end{pmatrix}.$$

$p_\mu = mcu_\mu$ 称自由粒子的四动量, 在洛伦兹变换下它是一个四维矢量.

因为有关系式

$$p^2 = p_\mu p_\mu = |\overrightarrow{p}|^2 - \left(\frac{E}{c}\right)^2 = -m^2c^2,$$

对此式作代换

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial X_i}, \quad E = -\frac{\partial S}{\partial t},$$

得到相对论性自由粒子的哈密顿–雅可比方程

$$\left(\frac{\partial S}{\partial X_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial X_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial X_3}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 = -m^2c^2. \tag{3.6}$$

为了向经典力学过渡, 可令 $S = S' - mc^2t$, 则

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S'}{\partial X_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial X_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial X_3}\right)^2\right] - \frac{1}{2mc^2}\left(\frac{\partial S'}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial S'}{\partial t} = 0,$$

当 $c \to \infty$ 时, 得到经典力学的哈密顿–雅可比方程.

对于由 N 个相对论性自由粒子组成的系统, 因为 $\mathrm{d}s_i = \sqrt{1-\dfrac{V_i^2}{c^2}}\mathrm{d}t$, 而 $\mathrm{d}t$ 与 i 无关, 所以

$$L = \sum_i L_i,$$

这里 $L_i = -mc^2\sqrt{1-\dfrac{V_i^2}{c^2}}$.

3.3 粒子的衰变和弹性碰撞

首先讨论粒子的衰变.

静止质量为 M 的粒子衰变成质量分别为 m_1, m_2 动量为 $\overrightarrow{p}_1$ 和 $\overrightarrow{p}_2$ 的两个粒子, 则 $\delta M = M - m_1 - m_2$ 称为质量亏损. 只有 $\delta M > 0$ 时自发衰变才可能发生.

由四动量守恒可得 $P = p_1 + p_2$, 又由

$$P^2 = -M^2c^2,$$
$$p_1^2 = -m_1^2c^2,$$
$$p_2^2 = -m_2^2c^2,$$

则

$$p_2^2 = (P-p_1)^2 = -M^2c^2 - m_1^2c^2 + 2ME_1 = -m_2^2c^2.$$

由此可得到衰变后两粒子的能量分别为

$$E_1 = \frac{(M^2+m_1^2-m_2^2)c^2}{2M},$$
$$E_2 = \frac{(M^2+m_2^2-m_1^2)c^2}{2M}.$$

接下来讨论核反应的阈能.

用质量为 m_1 的原子核去轰击质量为 m_2 的静止原子核, 反应后产物为 $m_3 + m_4 + \cdots$, 已知

$$(m_3+m_4+\cdots) - (m_1+m_2) = \delta M \geqslant 0,$$

若使此反应发生, 原子核 m_1 所需最小动能

$$T_1 = \varepsilon_1 - m_1c^2$$

称为该核反应的阈能.

因洛伦兹标量与参照系无关, 有

$$\begin{aligned}(p_1+p_2)_L^2 =&(p_1+p_2)_C^2=(p_3+p_4+\cdots)_C^2\\ =&-(m_3+m_4+\cdots)_C^2c^2=-(m_1+m_2+\delta M)^2c^2,\end{aligned}$$

其中下标 C 表示质心系 (假定反应后的产物在质心系都静止), 下标 L 表示实验室系 (质量为 m_2 的原子核静止).

由

$$(p_1+p_2)_L^2=p_1^2+p_2^2+2p_1\cdot p_2=-m_1^2c^2-m_2^2c^2-2m_2\varepsilon_1,$$

可得

$$T=\left(1+\frac{m_1}{m_2}+\frac{\delta M}{2m_2}\right)\delta Mc^2.$$

下面讨论二粒子的弹性碰撞.

在实验室系:

碰撞前四动量

$$p_1=\begin{pmatrix}\overrightarrow{p}_1\\ \mathrm{i}\dfrac{E_1}{c}\end{pmatrix},\quad p_2=\begin{pmatrix}0\\ \mathrm{i}m_2c\end{pmatrix},$$

碰撞后四动量

$$p_1'=\begin{pmatrix}\overrightarrow{p}'_1\\ \mathrm{i}\dfrac{E_1'}{c}\end{pmatrix},\quad p_2'=\begin{pmatrix}\overrightarrow{p}'_2\\ \mathrm{i}\dfrac{E_2'}{c}\end{pmatrix}.$$

变换到质心系 $\left(\sum\overrightarrow{p}_i=0\right)$, 得质心系在实验室系中的速度为

$$\overrightarrow{V}=\frac{\overrightarrow{p}_1}{E_1+m_2c^2}c^2.$$

在质心系:

碰撞前四动量

$$p_2^c=\begin{pmatrix}\overrightarrow{p}_2^c\\ \mathrm{i}\dfrac{E_2^c}{c}\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{p}_2^c=\frac{-m_2\overrightarrow{V}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}},\quad E_2^c=c\sqrt{(\overrightarrow{p}_2^c)^2+m_2^2c^2},$$

$$p_1^c=\begin{pmatrix}\overrightarrow{p}_1^c\\ \mathrm{i}\dfrac{E_1^c}{c}\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{p}_1^c=-\overrightarrow{p}_2^c,\quad E_1^c=c\sqrt{(\overrightarrow{p}_1^c)^2+m_1^2c^2},$$

碰撞后四动量

$$p_1^{c\prime}=\begin{pmatrix}\overrightarrow{p}_1^{c\prime}\\ \mathrm{i}\dfrac{E_1^{c\prime}}{c}\end{pmatrix},\quad p_2^{c\prime}=\begin{pmatrix}\overrightarrow{p}_2^{c\prime}\\ \mathrm{i}\dfrac{E_2^{c\prime}}{c}\end{pmatrix}.$$

因 $\overrightarrow{p}_1^c \cdot \overrightarrow{p}_1^{c\prime} = |\overrightarrow{p}_1^c||\overrightarrow{p}_1^{c\prime}|\cos\chi$, 这里 χ 是粒子 1 在质心系中的偏转角.

由碰撞前碰撞后系统的四动量守恒

$$p_1^c + p_2^c = p_1^{c\prime} + p_2^{c\prime},$$

则对弹性碰撞有

$$\sqrt{(\overrightarrow{p}_1^c)^2 + m_1^2c^2} + \sqrt{(\overrightarrow{p}_2^c)^2 + m_2^2c^2} = \sqrt{(\overrightarrow{p}_1^{c\prime})^2 + m_1^2c^2} + \sqrt{(\overrightarrow{p}_2^{c\prime})^2 + m_2^2c^2}.$$

这导致

$$|\overrightarrow{p}_1^c| = |\overrightarrow{p}_1^{c\prime}| = |\overrightarrow{p}_2^c| = |\overrightarrow{p}_2^{c\prime}| = \frac{m_2V}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} = P_c, \quad E_1^c = E_1^{c\prime}, \quad E_2^c = E_2^{c\prime}.$$

由此可得在质心系中碰撞后两粒子的四动量分别为

$$p_1^{c\prime} = \begin{pmatrix} P_c\cos\chi \\ P_c\sin\chi \\ 0 \\ \mathrm{i}\dfrac{E_1^c}{c} \end{pmatrix}, \quad p_2^{c\prime} = \begin{pmatrix} -P_c\cos\chi \\ -P_c\sin\chi \\ 0 \\ \mathrm{i}\dfrac{E_2^c}{c} \end{pmatrix}.$$

对碰撞后第二个粒子的四动量由质心系转换到实验室系

$$p_2' == \begin{pmatrix} \overrightarrow{p}'_2 \\ \mathrm{i}\dfrac{E_2'}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\mathrm{i}\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{i}\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -P_c\cos\chi \\ -P_c\sin\chi \\ 0 \\ \mathrm{i}\dfrac{E_2^c}{c} \end{pmatrix},$$

可得

$$\begin{aligned} E_2' &= \frac{-V}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} P_c\cos\chi + \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} E_2^c \\ &= -\frac{m_2V^2}{1-\dfrac{V^2}{c^2}}\cos\chi + \frac{m_2c^2}{1-\dfrac{V^2}{c^2}} = \frac{m_2c^2}{1-\dfrac{V^2}{c^2}}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\cos\chi\right). \end{aligned}$$

得到在实验室系中碰撞前和碰撞后粒子 2 的能量分别为

$$E_2 = m_2c^2, \quad E_2' = \frac{m_2c^2}{1-\dfrac{V^2}{c^2}}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\cos\chi\right),$$

所以因碰撞转移给粒子 2 的能量为

$$E_2' - E_2 = \frac{m_2 V^2}{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}(1 - \cos\chi).$$

最大能量转移为

$$(\Delta E_2)_{\max} = \frac{2m_2 V^2}{1 - \dfrac{V^2}{c^2}} = 2m_2\gamma^2 V^2 \quad \left(\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}, \quad \cos\chi = -1\right).$$

用粒子 1 的能量和质量表示

$$\overrightarrow{V} = \frac{\overrightarrow{p}_1}{E_1 + m_2c^2}c^2, \quad V^2 = \frac{E_1^2 - m_1^2c^4}{(E_1 + m_2c^2)^2}c^2,$$

可得

$$(\Delta E_2)_{\max} = \frac{2m_2(E_1^2 - m_1^2c^4)}{(m_1^2 + m_2^2)c^2 + 2E_1m_2}.$$

令 $T = E_1 - m_1c^2$, 是粒子 1 碰撞前的动能, 则

$$R = \frac{(\Delta E_2)_{\max}}{T} = \frac{2m_2(E_1 + m_1c^2)}{(m_1^2 + m_2^2)c^2 + 2E_1m_2}.$$

为二粒子弹性碰撞的最大能量转移比例.

讨论三种特殊情况:

(1) $m_1 = M \gg m_2$ (如核子 m_1=938MeV, 电子 m_2=0.5MeV), $R \approx \dfrac{2m_2(\gamma_1 + 1)}{M\left(1 + \dfrac{2m_2}{M}\gamma_1\right)}$.

对非相对论力学 $\gamma_1 \sim 1$, 可得 $R \approx \dfrac{4m_2}{M} \ll 1$;

对极端相对论情况 $\gamma_1 \gg 1$(如 $\gamma_1 \sim \dfrac{M}{m_2}$), 有 $R \approx 1$.

(2) $m_2 = M \gg m_1$ (如用电子去打核子), $R \approx \dfrac{2m_1(\gamma_1 + 1)}{M\left(1 + \dfrac{2m_1}{M}\gamma_1\right)}$.

对非相对论力学 $\gamma_1 \sim 1$, 得 $R \ll 1$;

对极端相对论情况 $\gamma_1 \gg 1$(如 $\gamma_1 \sim \dfrac{M}{m_1}$), 则有 $R \approx 1$.

(3) $m_2 = m_1 = m$, 可得 $R = 1$(与 γ 无关).

例如在反应堆中, 对中子慢化采用轻介质更为有效.

3.4　碰撞截面及洛伦兹变换下分布函数的变换

粒子碰撞截面及在洛伦兹变换下的不变性.

现在讨论粒子 1 与粒子 2 碰撞.

假定粒子 2 静止 (称 L 参照系), 则在 $\mathrm{d}V$ 体积中 $\mathrm{d}t$ 时间间隔内粒子 1 与粒子 2 的碰撞数为

$$\mathrm{d}N = \sigma v_{\mathrm{rel}} \rho_1 \rho_2 \mathrm{d}V \mathrm{d}t,$$

其中, σ 称粒子 1 与粒子 2 的碰撞截面, v_{rel} 是此参照系中粒子 1 相对于粒子 2 的速度, 可以将它表示成不变量的形式. 因为 $p_1 \cdot p_2 = -\dfrac{m_1\ m_2\ c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v_{\mathrm{rel}}^2}{c^2}}}$, 由此可得

$$v_{\mathrm{rel}} = c\sqrt{1-\frac{m_1^2 m_2^2 c^4}{(p_1 \cdot p_2)^2}},$$

这里 ρ_1 和 ρ_2 是此参照系中粒子 1 与粒子 2 的密度.

在任意参照系 (Σ 参照系) 中

$$\mathrm{d}N = A\rho_1\rho_2 \mathrm{d}V \mathrm{d}t.$$

因为 $\mathrm{d}N$ 和 $\mathrm{d}V\mathrm{d}t$ 是洛伦兹变换下的不变量及 $\rho = \rho_0\gamma, E = mc^2\gamma$, 所以 $A\rho_1\rho_2$ 是洛伦兹变换下的不变量, 或等价的 $A\dfrac{E_1E_2}{p_1 \cdot p_2}$ 是不变量.

由在 L 参照系 $\mathrm{d}N$ 的表达式, 得到

$$A = -\sigma v_{\mathrm{rel}} \frac{c^2(p_1 \cdot p_2)}{E_1 E_2}.$$

在 Σ 系中,

$$p_1 \cdot p_2 = \frac{m_1 m_2 c^2 \left(\dfrac{\overrightarrow{V}_1 \cdot \overrightarrow{V}_2}{c^2} - 1\right)}{\sqrt{1-\dfrac{V_1^2}{c^2}}\sqrt{1-\dfrac{V_2^2}{c^2}}},$$

由此可得在此参照系中粒子 1 与粒子 2 的相对速度为

$$v_{\rm rel} =c\sqrt{1-\frac{\left(1-\frac{V_1^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{V_2^2}{c^2}\right)}{\left(\frac{\overrightarrow{V}_1\cdot\overrightarrow{V}_2}{c^2}-1\right)^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{(\overrightarrow{V}_1-\overrightarrow{V}_2)^2-\frac{1}{c^2}(\overrightarrow{V}_1\times\overrightarrow{V}_2)^2}}{1-\frac{\overrightarrow{V}_1\cdot\overrightarrow{V}_2}{c^2}}.$$

所以

$$A =-\sigma v_{\rm rel}\frac{c^2(p_1\cdot p_2)}{E_1E_2}$$

$$=\sigma\sqrt{(\overrightarrow{V}_1-\overrightarrow{V}_2)^2-\frac{1}{c^2}(\overrightarrow{V}_1\times\overrightarrow{V}_2)^2}.$$

得到

$$\mathrm{d}N=\sigma\sqrt{(\overrightarrow{V}_1-\overrightarrow{V}_2)^2-\frac{1}{c^2}(\overrightarrow{V}_1\times\overrightarrow{V}_2)^2}\rho_1\rho_2\mathrm{d}V\mathrm{d}t.$$

当 $\overrightarrow{V}_1,\overrightarrow{V}_2$ 共线时, 得

$$\mathrm{d}N=\sigma|\overrightarrow{V}_1-\overrightarrow{V}_2|\rho_1\rho_2\mathrm{d}V\mathrm{d}t,$$

或者

$$\mathrm{d}N=-\sigma v_{\rm rel}\frac{c^2(p_1\cdot p_2)}{E_1E_2}\rho_1\rho_2\mathrm{d}V\mathrm{d}t,$$

因 $\frac{\rho_1\rho_2}{E_1E_2}$ 是不变量, 所以 σ 也是洛伦兹变换下的不变量.

下面讨论分布函数在洛伦兹变换下的变换:

由关系式

$f(\overrightarrow{p})\mathrm{d}\overrightarrow{p}=f'(\overrightarrow{p'})\mathrm{d}\overrightarrow{p'}$　(此量是几率或粒子数, 不依赖于参照系的选取)

可得

$$f(\overrightarrow{p})E\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{E}=f'(\overrightarrow{p'})E'\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p'}}{E'}.$$

下面证明 $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{E}$ 是洛伦兹变换下的不变量.

证明

$$\delta(p^2+m^2c^2)\mathrm{d}\overrightarrow{p}\mathrm{d}p_0 =\delta(\overrightarrow{p}^2+m^2c^2-p_0^2)\mathrm{d}\overrightarrow{p}\mathrm{d}p_0$$

$$=\delta\left(\frac{E^2}{c^2}-p_0^2\right)\mathrm{d}\overrightarrow{p}\mathrm{d}p_0=\frac{c}{2E}\left(\delta\left(p_0+\frac{E}{c}\right)+\delta\left(p_0-\frac{E}{c}\right)\right)\mathrm{d}\overrightarrow{p}\mathrm{d}p_0$$

$\left(\delta(\phi(x))=\sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|\phi'(x_i)|}\right.$, 这里 x_i 满足 $\phi(x_i)=0$(无重根)).

完成对 p_0 的积分, 得到

$$\int \delta(p^2+m^2)\mathrm{d}\overrightarrow{p}\mathrm{d}p_0=\frac{c\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{E},$$

即 $f(\overrightarrow{p})E$ 是洛伦兹变换下的不变量.

所以在洛伦兹变换下分布函数的变换为

$$f'(\overrightarrow{p'})=\frac{f(\overrightarrow{p})E}{E'}.$$

又因为

$$f(\overrightarrow{r},\overrightarrow{p})\mathrm{d}\overrightarrow{r}\mathrm{d}\overrightarrow{p}=f'(\overrightarrow{r'},\overrightarrow{p'})\mathrm{d}\overrightarrow{r'}\mathrm{d}\overrightarrow{p'}\quad (\text{此量是几率或粒子数}),$$

而

$$\mathrm{d}\overrightarrow{r}\mathrm{d}\overrightarrow{p}=\mathrm{d}\overrightarrow{r}E\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{E}=\mathrm{d}\overrightarrow{r}\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}mc^2\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{E}=\mathrm{d}\overrightarrow{r}\mathrm{d}t\frac{mc^3}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{E}$$

是不变量, 所以

$$f'(\overrightarrow{r'},\overrightarrow{p'})=f(\overrightarrow{r},\overrightarrow{p})\quad \left(\text{因}\mathrm{d}\overrightarrow{r}\mathrm{d}t,\mathrm{d}s,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{E}\text{都是洛伦兹变换下的不变量}\right).$$

3.5 粒子系统的对称性和守恒定律

对于封闭的粒子系统, 当系统的粒子运动满足拉格朗日方程时, 则由时空的均匀性, 对四维空间的平移变换 $X'_\mu(i)=X_\mu(i)+\epsilon_\mu$ 有

$$\delta S=\sum_i p_\mu(i)\delta X_\mu(i)|_a^b=\sum_i p_\mu(i)|_a^b\epsilon_\mu=0.$$

即由时空的均匀性导致封闭粒子系统的总四动量

$$\sum_i p_\mu(i)=\begin{pmatrix}\overrightarrow{P}\\ \mathrm{i}\dfrac{E}{c}\end{pmatrix}\tag{3.7}$$

守恒.

对无穷小洛伦兹变换 (四维空间的无穷小转动)

$$X'_\mu=X_\mu+\epsilon_{\mu\nu}X_\nu,\quad \delta X_\mu(i)=\epsilon_{\mu\nu}X_\nu(i),$$

其中 $\epsilon_{\mu\nu}=-\epsilon_{\nu\mu}$ 是反对称张量.

对于封闭的粒子系统, 由洛伦兹变换下的不变性 (四维空间的各向同性) 可得

$$
\begin{aligned}
\delta S =&\sum_i p_\mu(i)\delta X_\mu(i)|_a^b \\
=&\sum_i p_\mu(i)X_\nu(i)\epsilon_{\mu\nu}|_a^b \\
=&\frac{1}{2}\sum_i (p_\mu(i)X_\nu(i)+p_\nu(i)X_\mu(i))\epsilon_{\mu\nu}|_a^b \\
&+\frac{1}{2}\sum_i (p_\mu(i)X_\nu(i)-p_\nu(i)X_\mu(i))\epsilon_{\mu\nu}|_a^b \\
=&\frac{1}{2}\sum_i (p_\mu(i)X_\nu(i)-p_\nu(i)X_\mu(i))|_a^b\epsilon_{\mu\nu}=0.
\end{aligned}
$$

由此给出反对称张量

$$
M_{\mu\nu}=-\sum_i (p_\mu(i)X_\nu(i)-p_\nu(i)X_\mu(i)) \tag{3.8}
$$

是守恒量. 已经知道

$$
M_{ij}(i,j=1,2,3) \quad (\overrightarrow{M}=\sum_i \overrightarrow{X}(i)\times\overrightarrow{p}(i))
$$

是粒子系统的总角动量, 下面讨论

$$
M_{4\alpha}=i\sum_i\left(tp_\alpha(i)-\frac{X_\alpha(i)\varepsilon(i)}{c^2}\right),\quad \alpha=1,2,3
$$

的意义. 因 $\sum\limits_i \varepsilon(i)$ 是系统的总能量, 它是守恒量, 所以

$$
\frac{\sum\limits_i X_\alpha(i)\varepsilon(i)}{\sum\limits_i \varepsilon(i)}-\frac{c^2\sum\limits_i \overrightarrow{p}(i)}{\sum\limits_i \varepsilon(i)}t=\text{常数}.
$$

由此式可定义相对论性粒子系统的质心为

$$
\overrightarrow{R}=\frac{\sum\limits_i X_\alpha(i)\varepsilon(i)}{\sum\limits_i \varepsilon(i)},
$$

则粒子系统的质心以速度

$$
\overrightarrow{V}=\frac{c^2\sum\limits_i \overrightarrow{p}(i)}{\sum\limits_i \varepsilon(i)}
$$

做匀速直线运动.

3.6 例　　题

例题 3.1　一个静止质量为 M 的粒子在以速度 V 飞行的过程中分解为静止质量分别为 m_1 和 m_2 的两个粒子, 求它们的能量与出射角的关系.

解　四动量守恒给出在质心系两个衰变粒子的能量分别为

$$E_{1c}=\frac{(M^2+m_1^2-m_2^2)c^2}{2M},\quad E_{2c}=\frac{(M^2+m_2^2-m_1^2)c^2}{2M}.$$

在质心系中衰变粒子的动量 ($p_c=|\overrightarrow{p}_{1c}|=|\overrightarrow{p}_{2c}|$) 为

$$p_c^2=\frac{E_{1c}^2}{c^2}-m_1^2c^2=\frac{(M-m_1-m_2)(M-m_1-m_2)(M-m_1-m_2)(M-m_1-m_2)c^2}{4M^2}.$$

由此可知只有满足条件 $M\geqslant(m_1+m_2)$ 时衰变过程才可能发生.

由此得到粒子 1 和粒子 2 在质心系中的速度分别为

$$V_{1c}=\frac{c^2p_c}{E_{1c}},\quad V_{2c}=\frac{c^2p_c}{E_{2c}}.$$

假定在 L 系中一个衰变粒子 (如粒子 1) 的能量和出射角为 E_1 和 θ, 它在质心系中的能量为 E_{1c}, 则由四动量变换公式可得

$$E_{1c}=\frac{E_1-Vp_1\cos\theta}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}},\quad 即\cos\theta=\frac{c\left(E_1-E_{1c}\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}\right)}{V\sqrt{E_1^2-m^2c^4}}.$$

对于给定的 $\cos\theta$ 可得到 E_1 满足的二次方程

$$E_1^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\cos^2\theta\right)-2E_1E_{1c}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}+E_{1c}^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)+(m_1cV\cos\theta)^2=0.$$

E_1 有实根, 一个实根或两个实根的条件可由此二次方程的系数给出. 但用如下方法讨论更直观.

将粒子的四动量由质心系变换到实验室系,

$$\begin{aligned}
&p_x=\gamma\left(p_{cx}+\frac{VE_c}{c^2}\right),\\
&p_y=p_{cy},\\
&p_c^2=\left(p_x\sqrt{1-\beta^2}-\frac{VE_c}{c^2}\right)^2+p_y^2,
\end{aligned}$$

所以粒子动量的值在一椭圆上, 此椭圆的半径分别为 $p_c\gamma$ 和 p_c, 它的中心 O 点是由 A 点 ($\overrightarrow{p}=0$) 移动了 $\dfrac{VE_c}{c^2}$ 的距离.

容易看出, 当 $V_c=\dfrac{c^2p_c}{E_c}<V$ 时, A 点在椭圆之外. 这时对于给定的 $\cos\theta$, E_1 有两个正根, 而角度 θ 的最大值 $\theta_{\max}$ 由

$$\sin\theta_{\max}=\frac{p_c\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{mV}$$

给出.

当 $V_c=\dfrac{c^2p_c}{E_c}>V$ 时, A 点在椭圆之内, E_1 只有一个正根.

第 4 章　带电粒子在电磁场中的运动

4.1　相对论性带电粒子之间的相互作用

在相对论理论中, 粒子之间的相互作用是以有限速度传播的. 当说粒子 1 和粒子 2 相互作用, 是指粒子 1 在 t_1 时刻产生的场以有限速度传播到粒子 2 时 (在 t_2 时刻) 对粒子 2 的作用 (或反过来). 所以粒子之间的相互作用要通过粒子与场的耦合来实现. 带电粒子之间的相互作用要用电磁场与带电粒子的耦合来讨论. 电磁场通常用四维电磁势 $A_\mu = \binom{\overrightarrow{A}}{\mathrm{i}\phi}$ 来描述, 它是洛伦兹变换下的矢量, 电磁场与四维电磁势的关系为 $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}, \overrightarrow{H} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}$, 此关系式不依赖于参照系.

电磁场与带电粒子之间的耦合项对作用量的贡献必须是洛伦兹变换下的标量 $\frac{e}{c}A_\mu \mathrm{d}X_\mu$ (理论上还许可其他形式的耦合, 如张量–张量耦合, 但无实验上的需要). 一个质量为 m 电荷为 e 的带电粒子在电磁场 A_μ 中的作用量可表示为

$$
\begin{aligned}
S &= -mc\int_a^b \mathrm{d}s + \frac{e}{c}\int_a^b A_\mu \frac{\mathrm{d}X_\mu}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s \\
&= -mc^2\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\mathrm{d}t + e\int_{t_1}^{t_2} A_\mu u_\mu \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1}^{t_2}\left(-mc^2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\vec{A}\cdot\vec{V} - e\phi\right)\mathrm{d}t,
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

所以质量为 m 电荷为 e 的带电粒子在电磁场 A_μ 中的拉格朗日量为

$$
L = -mc^2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{V} - e\phi. \tag{4.2}
$$

定义广义动量

$$
\overrightarrow{P} = \frac{\partial L}{\partial \overrightarrow{V}} = \frac{m\overrightarrow{V}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} + \frac{e}{c}\overrightarrow{A},
$$

则哈密顿量

$$
H = \overrightarrow{P}\cdot\overrightarrow{V} - L
$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{m\vec{V}^2}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}+\frac{e}{c}\vec{A}\cdot\vec{V}-\left(-mc^2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}+\frac{e}{c}\vec{A}\cdot\vec{V}-e\phi\right)\\
&=c\sqrt{(\vec{P}-\frac{e}{c}\vec{A})^2+m^2c^2}+e\phi=\varepsilon_f+e\phi,
\end{aligned}
$$

所以有

$$
\left(\frac{H-e\phi}{c}\right)^2=\left(\vec{P}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2+m^2c^2.
$$

式中 $\varepsilon_f=\dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}$. 用 $\vec{\nabla}S$ 代替广义动量 $\vec{P}$, $-\dfrac{\partial S}{\partial t}$ 代替哈密顿量 H, 得到相对论性带电粒子在外电磁场中的哈密顿–雅可比方程

$$
\left(\vec{\nabla}S-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}+e\phi\right)^2+m^2c^2=0. \tag{4.3}
$$

4.2 带电粒子在电磁场中的运动方程

为了得到带电粒子在电磁场中的运动方程的具体形式, 将带电粒子在电磁场中的拉格朗日量 (4.2), 代入到拉格朗日方程

$$
\frac{\partial L}{\partial\vec{X}}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\vec{V}}=0. \tag{4.4}
$$

由

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial\vec{V}}=\frac{m\vec{V}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}+\frac{e}{c}\vec{A}=\vec{p}_f+\frac{e}{c}\vec{A},\\
&\frac{\partial L}{\partial\vec{X}}|_{\vec{V}}=-e\vec{\nabla}\phi+\frac{e}{c}\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\cdot\vec{V}),
\end{aligned}
$$

利用公式

$$
\begin{aligned}
&\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{b}+(\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\vec{a}+\vec{a}\times(\vec{\nabla}\times\vec{b})+\vec{b}\times(\vec{\nabla}\times\vec{a}),\\
&\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b}),\\
&\vec{a}\times(\vec{\nabla}\times\vec{b})=\vec{\nabla}_b(\vec{a}\cdot\vec{b})-(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{b},\\
&\vec{b}\times(\vec{\nabla}\times\vec{a})=\vec{\nabla}_a(\vec{a}\cdot\vec{b})-(\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\vec{a},
\end{aligned}
$$

可得

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{b}) =& \vec{\nabla}_a(\vec{a}\cdot\vec{b}) + \vec{\nabla}_b(\vec{a}\cdot\vec{b})\\ =& \vec{a}\times(\vec{\nabla}\times\vec{b}) + (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{b} + \vec{b}\times(\vec{\nabla}\times\vec{a}) + (\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\vec{a}.\end{aligned}$$

因 $\vec{V}$ 与 $\vec{X}$ 是独立变数, 有

$$\begin{aligned}&\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\cdot\vec{V})\\ =&(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} + (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V}) + \vec{V}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})\\ =&\vec{V}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) + \vec{V}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}),\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\partial L}{\partial\vec{X}}|_{\vec{V}} = -e\vec{\nabla}\phi + \frac{e}{c}\vec{V}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) + \frac{e}{c}\vec{V}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}).$$

得到带电粒子在电磁场中的拉格朗日方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m\vec{V}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} + \frac{e}{c}\vec{A}\right) = -e\vec{\nabla}\phi + \frac{e}{c}(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + \frac{e}{c}\vec{V}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}).$$

又因为

$$\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{A},$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m\vec{V}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\right) = -e\vec{\nabla}\phi - \frac{e}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \frac{e}{c}\vec{V}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}),$$

最终得到

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_f}{\mathrm{d}t} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{V}\times\vec{H}, \tag{4.5}$$

$e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{V}\times\vec{H}$ 称为洛伦兹力, 这里推导时利用了关系式

$$\begin{aligned}&\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t},\\ &\vec{H} = \vec{\nabla}\times\vec{A}.\end{aligned}$$

容易看出, 对于时间反演变换 $t\to -t$, 如果同时对电磁场作变换 $\vec{E}\to\vec{E}, \vec{H}\to -\vec{H}$ (或 $\vec{A}\to -\vec{A}, \phi\to\phi$), 则带电粒子运动方程不变.

也可由运动方程的正则形式出发导出带电粒子在外场中的运动方程, 由表达式

$$H = c\sqrt{\left(\overrightarrow{P} - \frac{e}{c}\overrightarrow{A}\right)^2 + m^2c^2} + e\phi$$

可以得到

$$\begin{aligned}
\dot{\overrightarrow{X}} =& \frac{\partial H}{\partial \overrightarrow{P}} = \frac{\varepsilon_f \overrightarrow{V}}{\varepsilon_f} = \overrightarrow{V}, \\
\dot{\overrightarrow{P}} =& -\frac{\partial H}{\partial \overrightarrow{X}} \\
=& -e\overrightarrow{\nabla}\phi - \frac{\overrightarrow{\nabla}\left(\overrightarrow{P} - \frac{e}{c}\overrightarrow{A}\right)^2}{2\varepsilon_f} = -e\overrightarrow{\nabla}\phi - V_i\overrightarrow{\nabla}(-\frac{e}{c}A_i) \\
=& -e\overrightarrow{\nabla}\phi + \frac{e}{c}\overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{A}),
\end{aligned}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m\overrightarrow{V}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} + \frac{e}{c}\overrightarrow{A}\right) = -e\overrightarrow{\nabla}\phi + \frac{e}{c}\overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{A}).$$

所以

$$\begin{aligned}
\frac{d\overrightarrow{p}_f}{dt} =& -e\overrightarrow{\nabla}\phi - \frac{e}{c}\frac{\partial\overrightarrow{A}}{\partial t} + \frac{e}{c}\overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{A}) - \frac{e}{c}(\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{A} \\
=& e\overrightarrow{E} + \frac{e}{c}\overrightarrow{V}\times\overrightarrow{H} \quad (\text{洛伦兹力}).
\end{aligned}$$

因为

$$\overrightarrow{p}_f = \frac{m\overrightarrow{V}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\varepsilon_f}{c^2}\overrightarrow{V}, \quad \overrightarrow{p}_f^2 + m^2c^2 = \frac{\varepsilon_f^2}{c^2},$$

有

$$\begin{aligned}
\varepsilon_f \mathrm{d}\varepsilon_f =& c^2\overrightarrow{p}_f\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{p}_f, \\
\mathrm{d}\varepsilon_f =& \overrightarrow{V}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{p}_f,
\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_f}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{V}\cdot\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}_f}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{V}\cdot(e\overrightarrow{E} + \frac{e}{c}\overrightarrow{V}\times\overrightarrow{H}) = e\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{E}.$$

带电粒子在电磁场中的动量和能量随时间的变化可写为四维形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\overrightarrow{p}_f \\ \mathrm{i}\frac{\varepsilon_f}{c}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e\overrightarrow{E} + \frac{e}{c}\overrightarrow{V}\times\overrightarrow{H} \\ \mathrm{i}\frac{e}{c}\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{E}\end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

在外电磁场中粒子的加速度可写为

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}}{\mathrm{d}t}=\frac{e}{m}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\left(\overrightarrow{E}+\frac{1}{c}\overrightarrow{V}\times\overrightarrow{H}-\frac{1}{c^2}\overrightarrow{V}(\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{E})\right).$$

运动方程 (4.6) 的另一推导:

$$S=-mc\int_a^b\mathrm{d}s+\frac{e}{c}\int_a^b A_\mu\frac{\mathrm{d}X_\mu}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s=-m\int\sqrt{-(\mathrm{d}X_\mu)^2}+\frac{e}{c}\int A_\mu\mathrm{d}X_\mu,$$

由 $\delta S=0$ 可得

$$\begin{aligned}&\int_a^b\left(mc\frac{\mathrm{d}X_\mu\delta\mathrm{d}X_\mu}{\sqrt{-(\mathrm{d}X_\mu)^2}}+\frac{e}{c}eA_\mu\delta\mathrm{d}X_\mu+\frac{e}{c}e\delta A_\mu\mathrm{d}X_\mu\right)\\
=&\int_a^b\left(mcu_\mu\delta\mathrm{d}X_\mu+\frac{e}{c}A_\mu\delta\mathrm{d}X_\mu+\frac{e}{c}\delta A_\mu\mathrm{d}X_\mu\right)\\
=&\int_a^b\left(-mc\mathrm{d}u_\mu\delta X_\mu-\frac{e}{c}\mathrm{d}A_\mu\delta X_\mu+\frac{e}{c}\delta A_\mu\mathrm{d}X_\mu\right)\\
=&\int_a^b\left(-mc\mathrm{d}u_\mu\delta X_\mu-\frac{e}{c}\frac{\partial A_\mu}{\partial X_\nu}\mathrm{d}X_\nu\delta X_\mu+\frac{e}{c}\frac{\partial A_\mu}{\partial X_\nu}\delta X_\nu\mathrm{d}X_\mu\right)\\
=&\int_a^b\left(-mc\mathrm{d}u_\mu-\frac{e}{c}\frac{\partial A_\mu}{\partial X_\nu}\mathrm{d}X_\nu\delta X_\mu+\frac{e}{c}\frac{\partial A_\nu}{\partial X_\mu}\delta X_\mu\mathrm{d}X_\nu\right)\\
=&\int_a^b\left(-mcw_\mu+\frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial X_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial X_\nu}\right)u_\nu\right)\delta X_\mu\mathrm{d}s=0,\end{aligned}$$

推导中用了

$$\begin{aligned}\mathrm{d}A_\mu=&\frac{\partial A_\mu}{\partial X_\nu}\mathrm{d}X_\nu\quad(微分),\\
\delta A_\mu=&\frac{\partial A_\mu}{\partial X_\nu}\delta X_\nu\quad(变分).\end{aligned}$$

最终得到带电粒子在电磁场中的运动方程的四维形式

$$mc\frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}s}=\frac{e}{c}F_{\mu\nu}u_\nu,\tag{4.7}$$

这里

$$F_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\nu}{\partial X_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial X_\nu}=\begin{pmatrix}0&H_3&-H_2&-\mathrm{i}E_1\\-H_3&0&H_1&-\mathrm{i}E_2\\H_2&-H_1&0&-\mathrm{i}E_3\\\mathrm{i}E_1&\mathrm{i}E_2&\mathrm{i}E_3&0\end{pmatrix}\tag{4.8}$$

称电磁场张量.

将四维速度 $u_\mu = \begin{pmatrix} \dfrac{\vec{V}}{c\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} \\ \mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} \end{pmatrix}$ 代入方程 (4.7) 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} \vec{p}_f \\ \mathrm{i}\dfrac{\varepsilon_f}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e\vec{E} + \dfrac{e}{c}\vec{V}\times\vec{H} \\ \mathrm{i}\dfrac{e}{c}\vec{E}\cdot\vec{V} \end{pmatrix},$$

与方程 (4.6) 完全相同.

已经知道, 对电磁势作规范变换 $A_\mu \to A_\mu + \dfrac{\partial f}{\partial x_\mu}$ 时,$\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 不变, 即带电粒子运动方程不变. 这一结果也可由表达式

$$\frac{e}{c}\int A_\mu \mathrm{d}X_\mu \to \frac{e}{c}\int A_\mu \mathrm{d}X_\mu + \frac{e}{c}\int \frac{\partial f}{\partial x_\mu}\mathrm{d}X_\mu$$

得到, 因为

$$\frac{e}{c}\int \frac{\partial f}{\partial x_\mu}\mathrm{d}X_\mu = \frac{e}{c}\int \mathrm{d}f,$$

在作用量中增加这一项不影响运动方程.

4.3　在洛伦兹变换下电磁场的变换

在洛伦兹变换 (2.7) 下, 电磁势 A_μ 是此洛伦兹变换下的矢量

$$\begin{pmatrix} A_1' \\ A_2' \\ A_3' \\ \mathrm{i}\phi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\mathrm{i}\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{i}\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \mathrm{i}\phi \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ict \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \mathrm{i}\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{i}\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ \mathrm{i}ct' \end{pmatrix}.$$

由关系式

$$
\begin{aligned}
F_{\mu\nu} =& \frac{\partial A_\nu}{\partial X_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial X_\nu}, \quad F'_{\mu\nu} = \frac{\partial A'_\nu}{\partial X'_\mu} - \frac{\partial A'_\mu}{\partial X'_\nu}, \\
\overrightarrow{E}' =& -\overrightarrow{\nabla}'\phi' - \frac{\partial \overrightarrow{A}'}{\partial t'}, \quad \overrightarrow{H}' = \overrightarrow{\nabla}' \times \overrightarrow{A}', \\
\overrightarrow{E} =& -\overrightarrow{\nabla}\phi - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}, \quad \overrightarrow{H} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}
\end{aligned}
$$

可以得到此种洛伦兹变换下电磁场的变换为

$$
E'_1 = E_1, \quad E'_2 = \frac{E_2 + \dfrac{V}{c}H_3}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}, \quad E'_3 = \frac{E_3 - \dfrac{V}{c}H_2}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}, \tag{4.9}
$$

$$
H'_1 = H_1, \quad H'_2 = \frac{H_2 - \dfrac{V}{c}E_3}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}, \quad H'_3 = \frac{H_3 + \dfrac{V}{c}E_2}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}. \tag{4.10}
$$

其中, $F_{\mu\nu}$ 是洛伦兹变换下的二阶张量, 即在洛伦兹变换下

$$
F'_{\mu\nu} = a_{\mu\alpha} a_{\nu\beta} F_{\alpha\beta} = a_{\mu\alpha} F_{\alpha\beta} \widetilde{a}_{\beta\nu},
$$

由此公式也可直接得到电磁场的变换关系.

容易证明 $F^2_{\mu\nu}$ 是洛伦兹变换下的标量, 并且

$$
\begin{aligned}
F^2_{\mu\nu} =& F_{\mu\nu}\widetilde{F}_{\nu\mu} = \mathrm{Tr}(F\widetilde{F}) \\
=& \mathrm{Tr}\left\{ \begin{pmatrix} 10 & H_3 & -H_2 & -\mathrm{i}E_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & -\mathrm{i}E_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & -\mathrm{i}E_3 \\ \mathrm{i}E_1 & \mathrm{i}E_2 & \mathrm{i}E_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -H_3 & H_2 & \mathrm{i}E_1 \\ H_3 & 0 & -H_1 & \mathrm{i}E_2 \\ -H_2 & H_1 & 0 & \mathrm{i}E_3 \\ -\mathrm{i}E_1 & -\mathrm{i}E_2 & -\mathrm{i}E_3 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\
=& 2(\overrightarrow{H}^2 - \overrightarrow{E}^2).
\end{aligned}
$$

还可证明 $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta} = -2\mathrm{i}\overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{H}$ 是赝标量, 因 $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla}\phi - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}$ 是极矢量, 而 $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}$ 是轴矢量.

最后证明

$$
2(\overrightarrow{H}^2 - \overrightarrow{E}^2), \quad 2\overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{H}
$$

是可由电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 构成的仅有的两个独立不变量.

证明　令 $\vec{F}=\vec{E}+\mathrm{i}\vec{H}$, 在洛伦兹变换下

$$\begin{aligned}
&x_1'=x_1\cos\psi-x_4\sin\psi,\\
&x_4'=x_1\sin\psi+x_4\cos\psi,\\
&\cos\psi=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}},\quad \sin\psi=\frac{\mathrm{i}\dfrac{V}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}},
\end{aligned}$$

则通过与电场和磁场的变换公式 (4.9) 和 (4.10) 比较可得

$$F_2'=F_2\cos\psi-F_3\sin\psi,\quad F_3'=F_2\sin\psi+F_3\cos\psi,$$

即在四维空间中 $(1,4)$ 平面上的转动与三维矢量 $\vec{F}$ 在三维空间中 $(2,3)$ 平面上的转动有一一对应关系.

$$\vec{F}^2=(\vec{E}^2-\vec{H}^2)+2\mathrm{i}\vec{E}\cdot\vec{H}$$

是在三维空间转动下由矢量 $\vec{F}$ 可构成的唯一的不变量, 所以 $2(\vec{H}^2-\vec{E}^2)$, $-2\mathrm{i}\vec{E}\cdot\vec{H}$ 是在洛伦兹变换下由电磁场张量可构成的两个仅有的独立不变量.

4.4　带电粒子在库仑场中的运动

带电粒子在库仑场中的运动是讨论很多问题的基础, 为了以后的参考, 这里给出主要的相关公式.

一个质量为 m 电荷为 e 的相对论性带电粒子在库仑场中的能量为

$$E=c\sqrt{\vec{p}^2+m^2c^2}+e\phi,$$

这里 $\phi=\dfrac{e'}{r}, e\phi=\dfrac{\alpha}{r}, \alpha=ee'$.

因为库仑势是中心势, 带电粒子的角动量 $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{p}$ 是守恒量, 所以粒子运动轨道在垂直于 $\vec{M}$ 的平面内.

采用极坐标, 则动量 $\vec{p}=p_r\vec{e}_r+p_\varphi\vec{e}_\varphi$, 角动量 $M=rp_\varphi$, 可得 $p_\varphi=\dfrac{M}{r}$. 带电粒子在库仑场中的能量为

$$E=c\sqrt{p_r^2+\frac{M^2}{r^2}+m^2c^2}+\frac{\alpha}{r}. \tag{4.11}$$

由 (4.11) 式出发可以给出两个带电粒子彼此无限靠近的条件.

如果电荷 e 和 e' 的符号相同而彼此排斥, 它们绝对不可能无限靠近.

如果电荷 e 和 e' 的符号相反而彼此吸引, 若 $Mc > |\alpha|$, (4.11) 式的第一项总大于第二项, 当 $r \to 0$ 时, 此式的右边趋向无限大. 若 $Mc < |\alpha|$, 则当 $r \to 0$ 时, 此式的右边可以保持有限 (p_r 被视为趋向无穷大).

因此, 对于由两个彼此吸引的带电粒子构成的系统, 若满足 $Mc < |\alpha|$ 的条件, 则它们在运动中彼此 "掉进对方", 这是相对论力学的特征. 对于非相对论力学, 只有在 $M = 0$ 时这种情况才能发生.

对于相对论性带电粒子在库仑场中的运动, 采用哈密顿–雅可比方程是方便的. 当用极坐标时, 方程 (4.3) 有形式

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\alpha}{r}\right)^2 + m^2c^2 = 0,$$

假定此方程的解为

$$S = -Et - M\phi + f(r),$$

则可以得到

$$S = -Et - M\phi + \int \mathrm{d}r\sqrt{\frac{1}{c^2}\left(E - \frac{\alpha}{r}\right)^2 - \frac{M^2}{r^2} - m^2c^2}. \tag{4.12}$$

粒子的运动轨道由方程

$$\frac{\partial S}{\partial M} = \text{常数}$$

来决定.

完成式 (4.12) 中对 r 的积分得到:

(1) 如果 $Mc > |\alpha|$, 则

$$\begin{aligned}&(c^2M^2 - \alpha^2)\frac{1}{r}\\ =&\, c\sqrt{(ME)^2 - m^2c^2(c^2M^2 - \alpha^2)}\cos\left(\phi\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{c^2M^2}}\right) - E\alpha;\end{aligned} \tag{4.13}$$

(2) 如果 $Mc < |\alpha|$, 则

$$\begin{aligned}&(\alpha^2 - c^2M^2)\frac{1}{r}\\ =&\, c\sqrt{(ME)^2 + m^2c^2(\alpha^2 - c^2M^2)}\cosh\left(\phi\sqrt{\frac{\alpha^2}{c^2M^2} - 1}\right) + E\alpha;\end{aligned} \tag{4.14}$$

(3) 如果 $Mc = |\alpha|$, 则

$$\frac{2E\alpha}{r} = E^2 - m^2c^4 - \phi^2\left(\frac{E\alpha}{cM}\right)^2. \tag{4.15}$$

式 (4.13)∼ 式 (4.15) 中 ϕ 的参考点是任意的.

由式 (4.13) 可以看出, 对于吸引势 ($\alpha < 0$), 如果 $E < mc^2$, 则粒子的运动限制在空间的有限范围, 但粒子的轨道并不封闭, 不可能得到像非相对论性带电粒子在库仑场中运动时那样的椭圆轨道.

如果 $E > mc^2$, 则粒子可运动到无穷远处.

对于相对论性带电粒子在库仑场中的散射, 当偏转角很小时容易得到散射截面的表达式. 假定入射粒子的碰撞参数为 b, 当偏转角 χ 很小时, 它的大小等于粒子的动量改变与粒子的入射动量之比. 又因为粒子的动量改变等于作用于带电粒子上力的垂直分量的时间积分, 即

$$\begin{aligned}\chi =&\frac{1}{p}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha b\mathrm{d}t}{(b^2+V^2t^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2\alpha}{pVb},\\ \mathrm{d}\sigma =&2\pi b\mathrm{d}b=2\pi b\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\chi}\mathrm{d}\chi=b\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\chi}\frac{\mathrm{d}\Omega}{\sin\chi},\end{aligned}$$

所以微分散射截面为

$$\mathrm{d}\sigma=4\left(\frac{\alpha}{pV}\right)^2\frac{\mathrm{d}\Omega}{\chi^4}, \tag{4.16}$$

其中 V 是入射粒子的速度.

对于非相对论带电粒子的情况, 轨道方程有解析表达式. 为了以后的参考这里给出主要公式.

在非相对论近似下粒子的哈密顿量

$$E=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{M^2}{r^2}\right)+e\phi=\frac{1}{2m}p_r^2+U_{\mathrm{eff}}(r),$$

其中 $U_{\mathrm{eff}}(r)=\dfrac{\alpha}{r}+\dfrac{M^2}{2mr^2}$.

粒子的径向速度 $V_r=\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\dfrac{2(E-U_{\mathrm{eff}}(r))}{m}}$, 由此可得

$$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\dfrac{2(E-U_{\mathrm{eff}}(r))}{m}}}$$

所以

$$t=\int\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\dfrac{2(E-U_{\mathrm{eff}}(r))}{m}}}+\text{常数}.$$

对于吸引势 $\alpha < 0$, 则 $U_{\text{eff}}(r)$ 在 $r = -\dfrac{M^2}{m\alpha}$ 处有最小值 (r 必须大于零).

当 $E > 0$ 时, 方程 $\dfrac{M^2}{2mr^2} + \dfrac{\alpha}{r} = E$ 只有一个根, 粒子可到达无穷远处.

当 $E < 0$ 时, 方程 $\dfrac{M^2}{2mr^2} - \dfrac{\alpha}{r} = E$ 有两个根, 粒子可能有封闭轨道.

对于排斥势 $\alpha > 0$, $U_{\text{eff}}(r)$ 没有最小值, 此时总有 $E > 0$, 方程 $\dfrac{M^2}{2mr^2} + \dfrac{\alpha}{r} = E$ 只有一个根.

哈密顿–雅可比方程的解为

$$\begin{aligned} S &= -Et + M\varphi + f(r) \\ &= -Et + M\varphi + \int \sqrt{2m(E - \frac{\alpha}{r}) - \frac{M^2}{r^2}}\mathrm{d}r, \end{aligned}$$

决定粒子轨道的方程为

$$\frac{\partial S}{\partial M} = 常数.$$

由此可得

$$\varphi = \int \frac{\dfrac{M}{r^2}}{\sqrt{2m(E - \dfrac{\alpha}{r}) - \dfrac{M^2}{r^2}}}\mathrm{d}r + 常数.$$

对吸引势

$$\begin{aligned} U_{\text{eff}}(r) &= \frac{M^2}{2mr^2} - \frac{|\alpha|}{r}, \\ \varphi &= \arccos\left(\frac{\dfrac{M}{r} - \dfrac{m|\alpha|}{M}}{\sqrt{2mE + \dfrac{m^2\alpha^2}{M^2}}}\right) + 常数, \\ \cos\varphi &= \frac{\dfrac{M}{r} - \dfrac{m|\alpha|}{M}}{\sqrt{2mE + \dfrac{m^2\alpha^2}{M^2}}}. \end{aligned}$$

令

$$p = \frac{M^2}{m|\alpha|}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}},$$

则

$$\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{M^2}} = \frac{m|\alpha|}{M}\sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}} = \frac{m|\alpha|}{M}\varepsilon.$$

由关系式

$$\frac{M}{r} - \frac{m|\alpha|}{M} = \frac{m|\alpha|}{M}\left(\frac{p}{r} - 1\right),$$

得到

$$\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon \cos\varphi,$$

此即带电粒子的轨道方程.

由 ε 的表达式可知, 当 $E < 0$ 时, 有 $\varepsilon < 1$, 轨道为椭圆. 长半轴

$$a = p/(1-\varepsilon^2) = \frac{|\alpha|}{2|E|},$$

短半轴

$$b = p/\sqrt{(1-\varepsilon^2)} = M/\sqrt{2m|E|}.$$

轨道方程可用 ε 和 a 表示为

$$\frac{a(1-\varepsilon^2)}{r} = 1 + \varepsilon \cos\varphi.$$

此椭圆轨道也可用参数方程表示.

因

$$t = \int \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2(E - U_{\mathrm{eff}}(r))}{m}}} = \sqrt{\frac{ma}{|\alpha|}} \int \frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{a^2\varepsilon^2 - (r-a)^2}},$$

作变数代换 $r - a = -a\varepsilon\cos\xi$, 可以得到

$$\begin{aligned} t =& \int \sqrt{\frac{ma^3}{|\alpha|}}(1 - \varepsilon\cos\xi)\mathrm{d}\xi \\ =& \sqrt{\frac{ma^3}{|\alpha|}}(\xi - \varepsilon\sin\xi) + \text{常数}. \end{aligned}$$

取积分常数为零, 有

$$\begin{aligned} r =& a(\varepsilon\cos\xi - 1), \\ t =& \sqrt{\frac{ma^3}{|\alpha|}}(\xi - \varepsilon\sin\xi). \end{aligned}$$

也可用直角坐标表示为

$$\begin{aligned} x =& a(\cos\xi - \varepsilon), \\ y =& a\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\xi. \end{aligned}$$

当 $E > 0$ 时, 有 $\varepsilon > 1$, 此时轨道为双曲线.

轨道方程可表示为

$$\frac{a(\varepsilon^2-1)}{r}=1+\varepsilon\cos\varphi,$$

其中 $a=\dfrac{|\alpha|}{2E}$.

此双曲线轨道也可用参数方程表示为

$$\begin{aligned}r=&a(e\cosh\xi-1),\\t=&\sqrt{\frac{ma^3}{|\alpha|}}(e\sinh\xi-\xi),\end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned}x=&a(e-\cosh\xi),\\y=&a\sqrt{e^2-1}\sinh\xi.\end{aligned}$$

下面讨论排斥势, 此时有

$$a=\frac{\alpha}{2E},\quad \varepsilon=\sqrt{1+\frac{2EM^2}{m\alpha^2}},$$

轨道方程为

$$\frac{p}{r}=-1+\varepsilon\cos\varphi,$$

或者

$$\frac{a(\varepsilon^2-1)}{r}=-1+\varepsilon\cos\varphi,$$

可知带电粒子轨道也是双曲线.

此双曲线轨道也可用参数方程表示为

$$\begin{aligned}r=&a(\varepsilon\cosh\xi+1),\\t=&\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(\varepsilon\sinh\xi+\xi),\end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned}x=&a(\varepsilon+\cosh\xi),\\y=&a\sqrt{\varepsilon^2-1}\sinh\xi.\end{aligned}$$

由上面的讨论可知当 $E>0$ 时, 无论二粒子之间是吸引或排斥势它们的轨道都是双曲线, 此即两个带电粒子的散射. 在非相对论情况下我们有卢瑟福散射公式.

在散射平面上定义散射角为

$$\chi=|\pi-2\varphi_0|,$$

其中 $\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \dfrac{\dfrac{M}{r^2}}{\sqrt{2m(E-U(r))-\dfrac{M^2}{r^2}}}\mathrm{d}r.$

令粒子在无穷远处的能量 $E=\dfrac{1}{2}mV_0^2$, 碰撞参数为 b, 角动量 $M=mV_0b$, 则

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\dfrac{b}{r^2}\mathrm{d}r}{\sqrt{1-\dfrac{2U}{mV_0^2}-\dfrac{b^2}{r^2}}}.$$

当 $U(r)=\dfrac{\alpha}{r}$ 时 (这里 $\alpha=\pm|ee'|$), 可得

$$\varphi_0 = \arccos\frac{\dfrac{\alpha}{mV_0^2b}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\alpha}{mV_0^2b}\right)^2}},$$

即

$$\cos\varphi_0 = \frac{\dfrac{\alpha}{mV_0^2b}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\alpha}{mV_0^2b}\right)^2}},\quad \sin\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\alpha}{mV_0^2b}\right)^2}},$$

所以

$$b^2 = \left(\frac{\alpha}{mV_0^2}\right)^2 \cot^2\frac{\chi}{2}.$$

由此可得散射截面

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\sigma &= 2\pi b\mathrm{d}b = 2\pi b\left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\chi}\right|\mathrm{d}\chi = \pi\left(\frac{\alpha}{mV_0^2}\right)^2\frac{\cos\dfrac{\chi}{2}\mathrm{d}\chi}{\sin^3\dfrac{\chi}{2}} \\ &= \left(\frac{\alpha}{2mV_0^2}\right)^2\frac{\mathrm{d}\varOmega}{\sin^4\dfrac{\chi}{2}}.\end{aligned} \tag{4.17}$$

此即卢瑟福散射公式 (与 α 的符号无关).

可以看出, 对于非相对论带电粒子的小角度散射, 式 (4.17) 和式 (4.16) 给出相同结果.

4.5　带电粒子在均匀恒定磁场中的运动

带电粒子在均匀恒定磁场 $\vec{H}$ 中的运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_f}{\mathrm{d}t} = \frac{e}{c}\vec{V} \times \vec{H}.$$

由 $\vec{p}_f = \frac{1}{c^2}\varepsilon\vec{V}$ 及 ε 是运动常数, 可得

$$\frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t} = \vec{V} \times \vec{\omega},$$

其中 $\vec{\omega} = \frac{ec\vec{H}}{\varepsilon} = \frac{e\vec{H}}{\gamma mc}$.

取均匀恒定磁场 $\vec{H}$ 的方向沿 z 轴, 则粒子的运动方程可表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V_z = 0,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(V_x + \mathrm{i}V_y) = -\mathrm{i}\omega(V_x + \mathrm{i}V_y),$$

它的解有形式

$$(V_x + \mathrm{i}V_y) = V_\perp \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t+\alpha)},$$

所以

$$\begin{aligned} V_z &= V_{z0}, \\ V_x &= V_\perp \cos(\omega t + \alpha), \\ V_y &= -V_\perp \sin(\omega t + \alpha). \end{aligned}$$

对此解再作一次积分, 可得带电粒子的轨道方程

$$\begin{aligned} x &= \varrho_0 \sin(\omega t + \alpha), \\ y &= \varrho_0 \cos(\omega t + \alpha), \\ \vec{\varrho} &= x\vec{e}_x + y\vec{e}_y, \\ z &= V_{z0}t + z_0, \end{aligned}$$

其中 $\varrho_0 = \frac{V_\perp}{\omega}$.

若 $V_{z0} = 0$, 则带电粒子在垂直于磁场 $\vec{H}$ 的平面内做圆周运动, 且有关系式 $\vec{V} = \vec{\varrho} \times \vec{\omega}$, 这里 $\vec{\varrho}$ 是圆轨道的半径矢量.

容易看出外加磁场越强带电粒子轨道半径越小.

在非相对论近似下 $\vec{\omega} = \frac{e\vec{H}}{mc}$.

4.6 带电粒子在均匀静电场和静磁场联合作用下的运动

非相对论带电粒子在电场和磁场作用下的运动方程为

$$m\dot{\vec{V}} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{V} \times \vec{H}.$$

取 $\vec{H}$ 沿 z 轴, $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 在 yz 平面上, 则在直角坐标系中运动方程为

$$\begin{aligned}
&m\ddot{x} = \frac{e}{c}\dot{y}H, \\
&m\ddot{y} = eE_y - \frac{e}{c}\dot{x}H, \\
&m\ddot{z} = eE_z, \\
&z = eE_z t^2 + V_{z0}t, \\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{x} + \mathrm{i}\dot{y}) + \mathrm{i}(\dot{x} + \mathrm{i}\dot{y}) = \mathrm{i}\frac{e}{m}E_y,
\end{aligned}$$

此方程有解

$$(\dot{x} + \mathrm{i}\dot{y}) = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \frac{c}{H}E_y.$$

适当选取 t 的零点, 可使得

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = a\cos\omega t + \frac{c}{H}E_y, \\
&\dot{y} = -a\sin\omega t.
\end{aligned}$$

在一个周期内取时间平均, 得到

$$\begin{aligned}
&\bar{\dot{x}} = \frac{c}{H}E_y = \frac{c\vec{E} \times \vec{H}}{H^2}, \\
&\bar{\dot{y}} = 0,
\end{aligned}$$

其中 $\vec{u} = \dfrac{c\vec{E} \times \vec{H}}{H^2}$ 称为电漂移速度.

带电粒子的速度选择器即是根据这一原理制成的.

4.7 带电粒子在非均匀恒定磁场中的漂移运动

令磁场 $\vec{H} = H\vec{n}$, 这里 $\vec{n}$ 是沿磁场方向的单位矢量. 当磁场沿着垂直于 $\vec{n}$ 的方向 (假定为单位矢量 $\vec{e}_\xi$ 的方向) 缓慢变化时, 令带电粒子的空间坐标

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{\varrho},$$

其中 $\vec{R}(t)$ 称引导中心的径向矢量, 它是时间 t 的缓慢变化的函数, $\vec{\varrho}(t)$ 是描述带电粒子绕引导中心快速转动而随 t 高速振荡的函数 (假定振荡周期为 T). 则对磁场有

$$\begin{aligned}\vec{H}(\vec{r}) =& \vec{H}(\vec{R}) + (\vec{\varrho}\cdot\vec{\nabla})\vec{H}\\ =& \vec{H}(\vec{R}) + (\vec{\varrho}\cdot\vec{e}_\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}(H\vec{n}).\end{aligned}$$

对于在空间缓慢变化的磁场, 与第一项相比第二项是小量.

由此式可知, 磁场 $\vec{H}$ 沿 $\vec{e}_\xi$ 的方向的缓慢改变有两种可能: 一种是磁场的方向 $\vec{n}$ 不变而磁场的大小 H 变化; 另一种是磁场的大小不变而磁场的方向 $\vec{n}$ 有缓慢改变.

首先讨论第一种情况, 假定磁场在垂直于磁场方向缓慢变化

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}(\vec{R}) + (\vec{\varrho}\cdot\vec{e}_\xi)\frac{\partial H}{\partial\xi}\vec{n}.$$

令 $\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{V}_1$, 与 $\vec{V}_0$ 相比 $\vec{V}_1$ 是小量. 得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\vec{V}_0}{\mathrm{d}t} =& \vec{V}_0\times\vec{\omega},\\ \vec{V}_0 =& \vec{\varrho}\times\vec{\omega}, \quad \vec{\omega} = \frac{e\vec{H}(\vec{R})}{\gamma mc},\end{aligned}$$

此即均匀恒定磁场的情形. 其中, $\vec{V}_1$ 满足方程

$$\frac{\mathrm{d}\vec{V}_1}{\mathrm{d}t} = \left(\vec{V}_1 + \frac{1}{H}\vec{V}_0\left(\vec{\varrho}\cdot\vec{e}_\xi\frac{\partial H}{\partial\xi}\right)\right)\times\vec{\omega}.$$

因为 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{V}_1}{\mathrm{d}t}$ 的时间平均为零, 由此可得带电粒子的漂移速度

$$\begin{aligned}\vec{V}_G =& \langle\vec{V}_1\rangle\\ =& -\frac{1}{H}\left\langle\vec{V}_0\left(\vec{\varrho}\cdot\vec{e}_\xi\frac{\partial H}{\partial\xi}\right)\right\rangle\\ =& -\frac{1}{H}\left\langle\omega\vec{\varrho}\left(\vec{\varrho}\cdot\vec{e}_\xi\frac{\partial H}{\partial\xi}\right)\right\rangle\times\vec{n}\\ =& \frac{\varrho_0^2}{2H}\frac{\partial H}{\partial\xi}(\vec{\omega}\times\vec{e}_\xi),\end{aligned}$$

其中利用了关系式

$$\langle\vec{\varrho}(\vec{\varrho}\cdot\vec{e}_\xi)\rangle = \frac{\varrho_0^2}{2}\vec{e}_\xi.$$

现在讨论第二种情况.

对带电粒子在此磁场中所受洛伦兹力在一个周期内取时间平均

$$\begin{aligned}\overrightarrow{f} &= \frac{e}{c}\dot{\overrightarrow{\varrho}} \times (\overrightarrow{\varrho} \cdot \overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{H}(\overrightarrow{R}) \\ &= \frac{e}{c}(\overrightarrow{\varrho} \times \overrightarrow{\omega}) \times (\overrightarrow{\varrho} \cdot \overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{H}(\overrightarrow{R}) \\ &= -\frac{mV_{\perp}^2}{2H}(\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{H}.\end{aligned}$$

利用

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = 0, \quad \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H} = 0,$$

则可得

$$(\overrightarrow{n} \times \overrightarrow{\nabla}) \times \overrightarrow{H} = H(\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{n} + \overrightarrow{n}(\overrightarrow{n} \cdot)\overrightarrow{\nabla}H.$$

利用

$$(\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{n} = \frac{\overrightarrow{e}_\rho}{\rho},$$

其中 ρ 是磁力线的曲率半径, $\overrightarrow{e}_\rho$ 是由磁力线的曲率中心到引导中心方向的单位矢量. 由此可以得

$$\overrightarrow{f} = \frac{mV_{\perp}^2}{2\rho}\overrightarrow{e}_\rho.$$

如果带电粒子沿磁场方向有速度分量 $V_{/\!/}$, 则可以将参照系选取在以 $V_{/\!/}$ 运动的系统上, 则这时带电粒子还要受到一个离心力

$$\frac{mV_{/\!/}^2}{\rho}\overrightarrow{e}_\rho,$$

所以总的等效洛伦兹力为

$$\overrightarrow{f} = m\left(V_{/\!/}^2 + \frac{V_{\perp}^2}{2}\right)\frac{1}{\rho}\overrightarrow{e}_\rho.$$

由此可得漂移速度

$$V_d = \frac{1}{\rho\omega}\left(V_{/\!/}^2 + \frac{V_{\perp}^2}{2}\right)\overrightarrow{e}_\rho \times \overrightarrow{n}.$$

在等离子体的磁约束装置中如何克服磁场边界处 (存在磁场梯度) 带电粒子由约束装置漂移出来是很重要的问题. 将环形约束装置扭曲成 ∞ 形是克服离子漂移的方案之一, 因为这样一来边界处的磁力线就没有确定的 $\overrightarrow{e}_\rho$ 了.

另一种有趣的情况是磁场在平行于它的方向上缓慢变化, 下面讨论带电粒子在这种磁场中的运动.

首先讨论绝热不变量.

对于封闭力学系统 $H=H(p,q)$, 即哈密顿量不显含时间 t, 所以

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial H}{\partial q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q}+\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q}=0,$$

即能量 E 是守恒量.

对于系统在有限空间的周期运动, 在相空间 (p,q) 中粒子轨道是一封闭曲线. 作用量为

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint p\mathrm{d}q=\frac{1}{2\pi}\int\int \mathrm{d}p\mathrm{d}q,$$

这里积分 $\int\int \mathrm{d}p\mathrm{d}q$ 是相空间中粒子轨道的封闭曲线所包围的面积.

因为

$$2\pi\frac{\partial I}{\partial E}=\oint\frac{\partial p}{\partial E}\mathrm{d}q=\oint\frac{1}{\dfrac{\partial H}{\partial p}}\mathrm{d}q=\oint\frac{\mathrm{d}q}{\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}}=\int_0^T\mathrm{d}t=T,$$

所以有

$$\frac{\partial E}{\partial I}=\omega.$$

下面证明 $I=\dfrac{1}{2\pi}\oint p\mathrm{d}q$ 是绝热不变量.

令

$$H=H(p,q,\lambda(t)),$$

其中 $\lambda(t)$ 是时间 t 的缓慢变化函数, 即 $T\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\ll\lambda$, T 是内部运动周期. 则有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial H}{\partial\lambda}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t},\\ \overline{\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}}&=\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\overline{\frac{\partial H}{\partial\lambda}}=\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\frac{1}{T}\int_0^T\frac{\partial H}{\partial\lambda}\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\frac{\displaystyle\oint\frac{\partial H}{\partial\lambda}\frac{1}{\dfrac{\partial H}{\partial p}}\mathrm{d}q}{\displaystyle\oint\frac{1}{\dfrac{\partial H}{\partial p}}\mathrm{d}q},\end{aligned}$$

在上面的积分路径上,λ 和 E 都是常数, 即有 $p=p(q,E,\lambda)$.

对方程 $H(p(q,E,\lambda),q,\lambda)=E$ 的两边对取 λ 微分, 可以得到

$$\frac{\partial H}{\partial\lambda}+\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial\lambda}=0,$$

所以 $\dfrac{\partial H}{\partial\lambda}\dfrac{1}{\dfrac{\partial H}{\partial p}}=-\dfrac{\partial p}{\partial\lambda}$.

由此得到

$$\overline{\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}} = -\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\frac{\oint \frac{\partial p}{\partial \lambda}\mathrm{d}q}{\oint \frac{\partial p}{\partial E}\mathrm{d}q},$$

或者

$$\oint \left(\frac{\partial p}{\partial E}\overline{\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}} + \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\frac{\partial p}{\partial \lambda}\right)\mathrm{d}q = 0,$$

此式可写为 $\overline{\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}} = 0$, 它表示

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint p\mathrm{d}q$$

是绝热不变量, 即当 λ 缓慢变化时 I 不变.

下面用绝热不变量讨论此漂移问题.

令 $\overrightarrow{H} = H\overrightarrow{e}_z$, 则 $\overrightarrow{A} = \frac{1}{2}\overrightarrow{H}\times\overrightarrow{r}$. 带电粒子的广义动量为 $\overrightarrow{P} = \overrightarrow{p}_f + \frac{e}{c}\overrightarrow{A}$, 可得绝热不变量

$$\begin{aligned} I =& \frac{1}{2\pi}\oint \overrightarrow{P}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = \frac{1}{2\pi}\oint \overrightarrow{p}_f\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} + \frac{1}{2\pi}\frac{e}{c}\oint \overrightarrow{A}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} \\ =& m\gamma\omega_H R^2 + \frac{1}{2\pi}\frac{e}{c}\int(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A})\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = m\gamma\omega_H R^2 - \frac{1}{2\pi}\frac{e}{c}H\pi R^2 \\ =& \frac{1}{2}m\gamma\omega_H R^2 = \frac{1}{2\pi}\frac{e}{c}H\pi R^2, \end{aligned}$$

其中 $H\pi R^2$ 是通过粒子轨道所围面积的磁通量, 上式表示它是绝热不变量.

因 $\omega_H = \frac{ecH}{E} = \frac{1}{\gamma}\frac{eH}{mc}$, $p_\perp = m\gamma R\omega_H$, 由此可知 $\frac{p_\perp^2}{H}$ 也是绝热不变量.

假定磁场沿 z 方向缓慢变化, $H_0 = H(z=0)$, 有

$$\frac{V_\perp^2}{H} = \frac{V_{\perp 0}^2}{H_0}.$$

又因为

$V_0^2 = V_{/\!/0}^2 + V_{\perp 0}^2 = V_{/\!/}^2 + V_\perp^2$, 可得

$$V_{/\!/}^2 = V_0^2 - V_{\perp 0}^2\frac{H}{H_0},$$

即在某处可有 $V_{/\!/} = 0$ 并在此处 $V_{/\!/}$ 改变符号.

约束热等离子体的磁镜装置即是根据此原理设计的.

4.8 例　　题

例题 4.1　地球的磁场可以视为是由磁矩为 $\vec{m} = 8.1 \times 10^{25}(\text{gauss} - \text{cm}^3)$ 的磁偶极子产生的 (磁偶极子指向南极).

(1) 估算地球表面赤道上的磁场;

(2) 有一个能量为 10MeV 的电子, 计算它绕赤道面上磁场的回旋频率和回旋半径;

(3) 计算此电子漂移地球一周所需时间.

解　(1) 采用的是高斯单位制.

H^2 的单位是能量密度 $(\text{erg/cm}^3 = \frac{1}{1.66}10^6\text{MeV/cm}^3)$,

$$\begin{aligned}
p_\perp c(\text{MeV}) =& eH\varrho_0 = \frac{e}{\sqrt{\hbar c}}\sqrt{\hbar c}H\varrho_0 \\
&\approx \sqrt{\frac{1}{137}}\sqrt{200.10^{-13}}\sqrt{\frac{1}{1.66}10^6}H\varrho_0(\text{gauss} - \text{cm}) \\
&\approx 3 \times 10^{-4}H\varrho_0(\text{gauss} - \text{cm}).
\end{aligned}$$

地球的磁偶极子产生的磁场 (见第 7 章)

$$\vec{H} = \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{n})\vec{n} - \vec{m}}{r^3},$$

在地球的赤道上满足 $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$, 所以

$$\vec{H} = -\frac{\vec{m}}{r^3}.$$

此处磁力线由南向北, 地球半径取为 6.4×10^8cm, 可得磁场的值约为

$$H \sim 3 \times 10^{-1}(\text{gauss})$$

(地球的电离层中的平均地磁场约为 $H \sim 5 \times 10^{-1}(\text{gauss})$).

(2) 由 $p_\perp c(\text{MeV}) \approx 3 \times 10^{-4}H\varrho_0(\text{gauss} - \text{cm})$ 和 $H \sim 3 \times 10^{-1}(\text{gauss})$ 如果 $p_\perp c = 10\text{MeV}$ 可得 $\varrho_0 \approx 1.1 \times 10^5\text{cm}$.

$$\begin{aligned}
\text{erg} =& \frac{1}{1.66}10^6\text{MeV}, \\
\omega =& \frac{ecH}{\varepsilon} = \frac{e}{\sqrt{\hbar c}}\sqrt{\hbar c}\frac{cH}{\varepsilon} \\
=& \sqrt{\frac{1}{137}}\sqrt{200 \times 10^{-13}} \times 3 \times 10^{10} \times \sqrt{\frac{1}{1.66}10^6}\frac{H}{\varepsilon} \\
\sim& \sqrt{\frac{180}{137 \times 1.66}} \times 10^7\frac{H}{\varepsilon} \sim 0.95 \times 10^7\frac{H}{\varepsilon},
\end{aligned}$$

这里 H 的单位为高斯, 粒子能量 ε 单位为 MeV. 代入 $H=3\times10^{-1}$,$\varepsilon=10$ 得到 $\omega=2.85\times10^5$.

(3) 漂移速度

$$\overrightarrow{V}_d=\frac{1}{\rho\omega}\left(V_{/\!/}^2+\frac{V_\perp^2}{2}\right)\overrightarrow{e}_\rho\times\overrightarrow{n},$$

假定

$$V_{/\!/}=0,\quad V_\perp=\omega\varrho_0,$$

则

$$V_d=\frac{\omega\varrho_0^2}{2\rho}.$$

假定地球磁场的曲率半径 $\rho=3000Km$, 可得 $V_d\approx3\times10^6$(cm/s), 即围绕赤道面的磁场作回旋运动的 10MeV 的电子还进行漂移运动, 约 330s 绕地球一周.

例题 4.2 假定磁场的大小沿磁场方向缓慢变化, 讨论带电粒子的运动方程.

解 如果在 z 轴上磁场为

$$H(z)\overrightarrow{e}_z,\quad H_0=H(0).$$

采用柱坐标, 借助关系式

$$\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{H}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho H_1}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_2}{\partial\phi}+\frac{\partial H(z)}{\partial z}=0,$$

得到

$$H_\rho(\rho,z)=-\frac{1}{2}\rho\frac{\partial H_z}{\partial z},$$
$$\ddot{z}=\frac{e}{\gamma mc}(-\rho\dot{\phi}H_\rho)=\frac{e}{2\gamma mc}\rho^2\dot{\phi}\frac{\partial H}{\partial z}.$$

利用

$$\rho^2\dot{\phi}=-a^2\omega_0=-\frac{V_{0\perp}^2}{\omega_0},$$

带电粒子沿 z 方向的运动方程为

$$\ddot{z}=-\frac{V_{0\perp}^2}{2H_0}\frac{\partial H(z)}{\partial z}.$$

则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\dot{z}^2\right)=-\frac{V_{0\perp}^2}{2H_0}\frac{\partial H(z)}{\partial z}\dot{z},$$

两边对 t 积分可得

$$V_{/\!/}^2=V_0^2-\frac{V_{0\perp}^2H(z)}{H_0}.$$

第 5 章　真空中的 Maxwell 方程组

5.1　经典场及其运动方程

假定经典场的拉格朗日密度为

$$\pounds = \pounds\left(\phi_\alpha(x), \frac{\partial\phi_\alpha(x)}{\partial x_\mu}\right),$$

则作用量为

$$S = \int \pounds\left(\phi_\alpha(x), \frac{\partial\phi_\alpha(x)}{\partial x_\mu}\right)\mathrm{d}^{(4)}x,$$

其中 $\mathrm{d}^{(4)}x = \mathrm{d}^3x\mathrm{d}t$.

则由最小作用量原理 $\delta S = 0$ 可得场的拉格朗日方程

$$\frac{\partial\pounds}{\partial\phi_\alpha} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\pounds}{\partial\left(\dfrac{\partial\phi_\alpha(x)}{\partial x_\mu}\right)}\right) = 0. \tag{5.1}$$

方程推导如下:

$$\begin{aligned}
&\delta\int \pounds\left(\phi_\alpha(x), \frac{\partial\phi_\alpha(x)}{\partial x_\mu}\right)\mathrm{d}^{(4)}x \\
=&\int\left(\frac{\partial\pounds}{\partial\phi_\alpha}\delta\phi_\alpha + \frac{\partial\pounds}{\partial\left(\dfrac{\partial\phi_\alpha(x)}{\partial x_\mu}\right)}\delta\frac{\partial\phi_\alpha(x)}{\partial x_\mu}\right)\mathrm{d}^{(4)}x \\
=&\int\left(\frac{\partial\pounds}{\partial\phi_\alpha}\delta\phi_\alpha + \frac{\partial\pounds}{\partial\left(\dfrac{\partial\phi_\alpha(x)}{\partial x_\mu}\right)}\frac{\partial\delta\phi_\alpha(x)}{\partial x_\mu}\right)\mathrm{d}^{(4)}x \\
=&\int\left(\frac{\partial\pounds}{\partial\phi_\alpha} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\pounds}{\partial\left(\dfrac{\partial\phi_\alpha(x)}{\partial x_\mu}\right)}\right)\right.\delta\phi_\alpha(x)\mathrm{d}^{(4)}x = 0,
\end{aligned}$$

由于 $\delta\phi$ 是任意的, 可得到

$$\frac{\partial \pounds}{\partial \phi_\alpha} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial \pounds}{\partial\left(\dfrac{\partial \phi_\alpha(x)}{\partial x_\mu}\right)}\right) = 0.$$

场的运动方程的正则形式

定义场的广义动量密度 $\pi_\alpha = \dfrac{\partial \pounds}{\partial \dot{\phi}_\alpha}$, 则哈密顿量密度为

$$h = \sum_\alpha \pi_\alpha \dot{\phi}_\alpha - \pounds\left(\phi_\alpha(x), \frac{\partial \phi_\alpha(x)}{\partial x_\mu}\right).$$

由 $\dot{\phi}_\alpha = \dot{\phi}_\alpha\left(\phi_\alpha, \pi_\alpha, \dfrac{\partial \phi_\alpha(x)}{\partial x_i}\right), i = 1, 2, 3$, 则

$$h = \pi_\alpha \dot{\phi}_\alpha - \pounds\left(\phi_\alpha(x), \frac{\partial \phi_\alpha(x)}{\partial x_\mu}\right) = h\left(\phi_\alpha, \pi_\alpha, \frac{\partial \phi_\alpha(x)}{\partial x_i}\right),$$

所以

$$\left.\frac{\partial h}{\partial \pi_\alpha}\right|_{\phi_\alpha, \frac{\partial \phi_\alpha(x)}{\partial x_i}} = \dot{\phi}_\alpha + \pi_\beta \frac{\partial \dot{\phi}_\beta}{\partial \pi_\alpha} - \left.\frac{\partial \pounds}{\partial \dot{\phi}_\beta}\right|_{\phi_\alpha} \frac{\partial \dot{\phi}_\beta}{\partial \pi_\alpha} = \dot{\phi}_\alpha,$$

即 $\dot{\phi}_\alpha = \dfrac{\partial h}{\partial \pi_\alpha}|_{\phi_\alpha}$.

又

$$\left.\frac{\partial h}{\partial \phi_\alpha}\right|_{\pi_\alpha} = \pi_\beta \frac{\partial \dot{\phi}_\beta}{\partial \phi_\alpha} - \frac{\partial \pounds}{\partial \phi_\alpha} - \frac{\partial \pounds}{\partial \dot{\phi}_\beta} \frac{\partial \dot{\phi}_\beta}{\partial \phi_\alpha} = -\frac{\partial \pounds}{\partial \phi_\alpha},$$

由场的拉格朗日方程有

$$-\frac{\partial \pounds}{\partial \phi_\alpha} = -\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial \pounds}{\partial\left(\dfrac{\partial \phi_\alpha(x)}{\partial x_\mu}\right)}\right) = -\dot{\pi}_\alpha - \sum_{i=1,2,3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \pounds}{\partial\left(\dfrac{\partial \phi_\alpha(x)}{\partial x_i}\right)}\right),$$

所以

$$\dot{\pi}_\alpha = -\frac{\partial h}{\partial \phi_\alpha} - \sum_{i=1,2,3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \pounds}{\partial\left(\dfrac{\partial \phi_\alpha(x)}{\partial x_i}\right)}\right).$$

因为

$$h = \pi_\alpha \dot{\phi}_\alpha\left(\phi_\alpha, \pi_\alpha, \frac{\partial \phi_\alpha(x)}{\partial x_i}\right) - \pounds\left(\phi_\alpha(x), \dot{\phi}_\alpha, \frac{\partial \phi_\alpha(x)}{\partial x_i}\right) = h\left(\phi_\alpha, \pi_\alpha, \frac{\partial \phi_\alpha(x)}{\partial x_i}\right),$$

可得

$$\frac{\partial h}{\partial\left(\dfrac{\partial\phi_\alpha(x)}{\partial x_i}\right)}=\pi_\beta\frac{\partial\dot{\phi}_\beta}{\partial\left(\dfrac{\partial\phi_\alpha(x)}{\partial x_i}\right)}-\frac{\partial\pounds}{\partial\left(\dfrac{\partial\phi_\alpha(x)}{\partial x_i}\right)}-\frac{\partial\pounds}{\partial\dot{\phi}_\beta}\frac{\partial\dot{\phi}_\beta}{\partial\left(\dfrac{\partial\phi_\alpha(x)}{\partial x_i}\right)}=-\frac{\partial\pounds}{\partial\left(\dfrac{\partial\phi_\alpha(x)}{\partial x_i}\right)},$$

即

$$\dot{\pi}_\alpha=-\frac{\partial h}{\partial\phi_\alpha}+\sum_{i=1,2,3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial h}{\partial\left(\dfrac{\partial\phi_\alpha(x)}{\partial x_i}\right)}\right).$$

所以得到经典场运动方程的正则形式

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_\alpha&=\left.\frac{\partial h}{\partial\pi_\alpha}\right|_{\phi_\alpha},\\ \dot{\pi}_\alpha&=-\frac{\partial h}{\partial\phi_\alpha}+\sum_{i=1,2,3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial h}{\partial\left(\dfrac{\partial\phi_\alpha(x)}{\partial x_i}\right)}\right).\end{aligned}\tag{5.2}$$

5.2 电磁场的 Maxwell 方程组

取自由电磁场的拉格朗日密度为

$$\pounds_f=-\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}^2,$$

这里 $F_{\mu\nu}=\dfrac{\partial A_\nu}{\partial X_\mu}-\dfrac{\partial A_\mu}{\partial X_\nu}$ 是电磁场张量.

已经知道 $F_{\mu\nu}^2$ 是洛伦兹变换下的标量 ($F_{\mu\nu}^2=2(\overrightarrow{H}^2-\overrightarrow{E}^2)$), 这里采用高斯单位制 (因子为 $\dfrac{1}{16\pi}$).

拉格朗日密度中电磁场与带电粒子系统的耦合项也必须是洛伦兹标量

$$\begin{aligned}\frac{e}{c}\sum_i\int A_\mu\mathrm{d}X_\mu=&\frac{e}{c}\sum_i\int A_\mu u_\mu\mathrm{d}s\\ =&\frac{e}{c}\sum_i\int(\delta(\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r}_i)\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{V}-\delta(\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r}_i)c\phi)\mathrm{d}\overrightarrow{r}\mathrm{d}t\\ =&\frac{1}{c}\int A_\mu j_\mu\mathrm{d}^4x.\end{aligned}$$

这里定义了四维流

$$j_\mu=\rho\frac{\mathrm{d}X_\mu}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}\rho\overrightarrow{V}\\ \mathrm{i}c\rho\end{pmatrix},$$

其中 $\rho = \sum_i e\delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$ 是带电粒子系统的电荷密度.

所以 $\pounds = -\dfrac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}^2 + \dfrac{1}{c}A_\mu j_\mu$, 作用量 $S = \int \pounds \mathrm{d}^4x$ 是洛伦兹标量.

由场的拉格朗日方程 (5.1) 出发, 有

$$\frac{\partial \pounds}{\partial A_\sigma} = \frac{1}{c}j_\sigma$$

及

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_{\alpha\beta}^2}{\partial\left(\dfrac{\partial A_\sigma(x)}{\partial x_\mu}\right)} =& \frac{2F_{\alpha\beta}}{\partial\left(\dfrac{\partial A_\sigma(x)}{\partial x_\mu}\right)}\left(\frac{\partial A_\beta}{\partial X_\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial X_\beta}\right)\\ =& 2F_{\alpha\beta}(\delta_{\sigma\beta}\delta_{\alpha\mu} - \delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\mu}) = 2(F_{\mu\sigma} - F_{\sigma\mu}) = 4F_{\mu\sigma},\end{aligned}$$

由此可得电磁场的运动方程的四维形式

$$\frac{\partial F_{\mu\sigma}}{\partial X_\mu} = -\frac{4\pi}{c}j_\sigma,$$

其中

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & -\mathrm{i}E_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & -\mathrm{i}E_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & -\mathrm{i}E_3 \\ \mathrm{i}E_1 & \mathrm{i}E_2 & \mathrm{i}E_3 & 0 \end{pmatrix}$$

是电磁场张量.

当 $\sigma = 1, 2, 3$ 时, 得 $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \dfrac{4\pi}{c}\vec{j}$;

当 $\sigma = 4$ 时, 得 $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$.

又根据关系式 $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ 可得

$$\begin{aligned}&\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0,\\ &\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.\end{aligned}$$

可以证明, 方程 $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$ 和 $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ 可表示为四维形式

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial X_\gamma} + \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial X_\alpha} + \frac{\partial F_{\gamma\alpha}}{\partial X_\beta} = 0.$$

上式中如果 α, β, γ 中的任何两个相等, 则由 F 的反对称性容易得到上式.

当 $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ 时, 由电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 的表示式及 $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H} = 0, \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{H}}{\partial t}$ 可直接验证上方程式. 最终得到真空中的 Maxwell 方程组为

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} &= 4\pi\rho, \\
\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{H}}{\partial t}, \\
\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H} &= 0, \\
\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\overrightarrow{j}
\end{aligned} \tag{5.3}
$$

或等价的四维形式

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial X_\gamma} + \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial X_\alpha} + \frac{\partial F_{\gamma\alpha}}{\partial X_\beta} = 0, \\
&\frac{\partial F_{\mu\sigma}}{\partial X_\mu} = -\frac{4\pi}{c} j_\sigma.
\end{aligned} \tag{5.4}
$$

5.3 电磁场的能量密度和能流密度

由 Maxwell 方程 (5.3) 出发, 有

$$
\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} = c\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} - 4\pi\overrightarrow{j}, \quad \frac{\partial \overrightarrow{H}}{\partial t} = -c\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E},
$$

由此可得

$$
\begin{aligned}
\text{左边} =& \overrightarrow{E} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} + \overrightarrow{H} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{H}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{E}^2 + \overrightarrow{H}^2), \\
\text{右边} =& c[\overrightarrow{E} \cdot (\overrightarrow{\nabla}_H \times \overrightarrow{H}) - \overrightarrow{H} \cdot (\overrightarrow{\nabla}_E \times \overrightarrow{E})] - 4\pi\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E} \\
=& -c\overrightarrow{\nabla} \cdot (\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{H}) - 4\pi\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E},
\end{aligned}
$$

利用恒等式

$$
(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}) \cdot \overrightarrow{C} = \overrightarrow{A} \cdot (\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}), \overrightarrow{\nabla} \cdot (\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{H}) = \overrightarrow{\nabla}_E \cdot (\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{H}) + \overrightarrow{\nabla}_H \cdot (\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{H})
$$

及高斯定理可得

$$
\frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{1}{8\pi}(\overrightarrow{E}^2 + \overrightarrow{H}^2)\mathrm{d}V + \int_V \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E}\mathrm{d}V = -c\oint_S \left(\frac{\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{H}}{4\pi}\right) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S},
$$

其中 V 是三维空间的任一体积, S 是它的表面.

对于由点电荷组成的系统

$$\int_V \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E} \mathrm{d}V = e\sum_i \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{V}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i \varepsilon_{\mathrm{kin}},$$

可以得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_V \frac{1}{8\pi}(\overrightarrow{E}^2 + \overrightarrow{H}^2)\mathrm{d}V + \sum_i \varepsilon_{\mathrm{kin}}(i)\right\} = -c\oint\left(\frac{\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{H}}{4\pi}\right) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}, \tag{5.5}$$

其中 $\frac{1}{8\pi}(\overrightarrow{E}^2 + \overrightarrow{H}^2)$ 是电磁场的能量密度,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_V \frac{1}{8\pi}(\overrightarrow{E}^2 + \overrightarrow{H}^2)\mathrm{d}V + \sum_i \varepsilon_{\mathrm{kin}}(i)\right\}$$

表示电磁场和带电粒子系统在体积 V 内的总能量在单位时间的增加, 而 $-c\oint\left(\frac{\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{H}}{4\pi}\right) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}$ 是单位时间内由体积 V 的表面流进的电磁场的能量. 所以方程 (5.5) 表示带电粒子系统和电磁场的总能量守恒.

$$\overrightarrow{S} = \frac{c}{4\pi}\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{H}$$

表示单位时间流过单位面积的能量, 即能流密度. $\overrightarrow{S}$ 称为玻印亭矢量.

5.4 对称性和电磁场的守恒定律

假定电磁场的作用量为

$$S = \int \pounds\left(A_\sigma(x), \frac{\partial A_\sigma(x)}{\partial x_\mu}\right)\mathrm{d}^{(4)}x,$$

$\pounds$ 是拉格朗日密度.

由时空的均匀性, $\pounds$ 不显含 X_μ, 借助拉格朗日方程可得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \pounds}{\partial X_\mu} &= \frac{\partial \pounds}{\partial A_\sigma(x)}\frac{\partial A_\sigma}{\partial X_\mu} + \frac{\partial \pounds}{\partial\left(\frac{\partial A_\sigma(x)}{\partial x_\alpha}\right)}\frac{\partial}{\partial X_\mu}\left(\frac{\partial A_\sigma}{\partial X_\alpha}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial X_\alpha}\frac{\partial \pounds}{\partial\left(\frac{\partial A_\sigma(x)}{\partial x_\alpha}\right)}\frac{\partial A_\sigma}{\partial X_\mu} + \frac{\partial \pounds}{\partial\left(\frac{\partial A_\sigma(x)}{\partial x_\alpha}\right)}\frac{\partial}{\partial X_\alpha}\frac{\partial A_\sigma}{\partial X_\mu} \\
&= \frac{\partial}{\partial X_\alpha}\left(\frac{\partial A_\sigma}{\partial X_\mu}\frac{\partial \pounds}{\partial\left(\frac{\partial A_\sigma(x)}{\partial x_\alpha}\right)}\right),
\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial X_\alpha}\left\{\pounds\delta_{\mu\alpha}-\frac{\partial A_\sigma}{\partial X_\mu}\frac{\partial\pounds}{\partial\left(\dfrac{\partial A_\sigma(x)}{\partial x_\alpha}\right)}\right\}=0.$$

令

$$T_{\mu\alpha}=-\pounds\delta_{\mu\alpha}+\frac{\partial A_\sigma}{\partial X_\mu}\frac{\partial\pounds}{\partial\left(\dfrac{\partial A_\sigma(x)}{\partial x_\alpha}\right)},$$

则得到

$$\frac{\partial}{\partial X_\alpha}T_{\mu\alpha}=0.$$

应当指出如此定义的 $T_{\mu\alpha}$ 有不确定性.

如果 $\psi_{\mu\alpha\beta}$ 关于指标 α,β 是反对称的, 则 $T'_{\mu\alpha}=T_{\mu\alpha}+\dfrac{\partial}{\partial X_\beta}\psi_{\mu\alpha\beta}$ 也满足

$$\frac{\partial}{\partial X_\alpha}T'_{\mu\alpha}=0.$$

下面讨论 $\dfrac{\partial}{\partial X_\alpha}T_{\mu\alpha}=0$ 的物理意义.

由 $\dfrac{\partial}{\partial X_\alpha}T_{\mu\alpha}=0$, 可得

$$P_\mu=\frac{\mathrm{i}}{c}\int T_{\mu\alpha}\mathrm{d}S_\alpha$$

是守恒量 (这里积分是取 $x_4=$ 常数的超面).

因为

$$P_4=\frac{\mathrm{i}}{c}\int T_{4\alpha}\mathrm{d}S_\alpha=\frac{\mathrm{i}}{c}\int T_{44}\mathrm{d}S_4=\frac{\mathrm{i}}{c}\int T_{44}\mathrm{d}V,$$

而 $T_{44}=-\pounds+p\dot{q}=h$ 是场的能量密度, 所以 $\displaystyle\int T_{44}\mathrm{d}V$ 是电磁场的总能量.

由此可知

$$P_\mu=\frac{\mathrm{i}}{c}\int T_{\mu\alpha}\mathrm{d}V$$

是自由电磁场的总四动量. $T_{\mu\nu}$ 称为电磁场的能量–动量张量.

又由电磁场的拉格朗日密度在洛伦兹变换下的不变性, 可以得到

$$M_{\mu\nu}=\int(X_\mu\mathrm{d}P_\nu-X_\nu\mathrm{d}P_\mu)=\int(X_\mu T_{\nu\ell}-X\nu T_{\mu\ell})\mathrm{d}S_\ell$$

是守恒量, 所以

$$\frac{\partial}{\partial X_\ell}(X_\mu T_{\nu\ell}-X_\nu T_{\mu\ell})=0.$$

而

$$\delta_{\mu\ell}T_{\nu\ell}+X_\mu\frac{\partial}{\partial X_\ell}T_{\nu\ell}-\delta_{\nu\ell}T_{\mu\ell}-X_\nu\frac{\partial}{\partial X_\ell}T_{\mu\ell}=0$$

给出 $T_{\mu\nu}-T_{\nu\mu}=0$, 即四维能量–动量张量必须是对称的.

由于 $T_{\mu\nu}=-\pounds\delta_{\mu\nu}+\frac{\partial A_\sigma}{\partial X_\mu}\frac{\partial\pounds}{\partial\left(\frac{\partial A_\sigma(x)}{\partial X_\nu}\right)}$ 并不是对称的, 必须将 $T_{\mu\nu}$ 对称化.

对自由电磁场 $\pounds=-\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}^2$, 可得

$$T_{\mu\nu}=-\pounds\delta_{\mu\nu}+\frac{\partial A_\sigma}{\partial X_\mu}\frac{\partial\pounds}{\partial\left(\frac{\partial A_\sigma(x)}{\partial X_\nu}\right)}=-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial A_\sigma}{\partial X_\mu}F_{\nu\sigma}-\pounds\delta_{\mu\nu},$$

增加一项 $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial A_\mu}{\partial X_\sigma}F_{\nu\sigma}$, 则自由电磁场的四维能量–动量张量 (对称化) 为

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}&=-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial A_\sigma}{\partial X_\mu}F_{\nu\sigma}+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial A_\mu}{\partial X_\sigma}F_{\nu\sigma}-\pounds\delta_{\mu\nu}\\
&=-\frac{1}{4\pi}F_{\mu\sigma}F_{\nu\sigma}-\pounds\delta_{\mu\nu}\\
&=\frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix}
(H_1^2+E_1^2-\frac{1}{2}(\vec{H}^2+\vec{E}^2)) & H_1H_2+E_1E_2 & H_1H_3+E_1E_3 & -\mathrm{i}\frac{4\pi}{c}S_1\\
H_1H_2+E_1E_2 & (H_2^2+E_2^2-\frac{1}{2}(\vec{H}^2+\vec{E}^2)) & H_2H_3+E_2E_3 & -\mathrm{i}\frac{4\pi}{c}S_2\\
H_1H_3+E_1E_3 & H_2H_3+E_2E_3 & (H_3^2+E_3^2-\frac{1}{2}(\vec{H}^2+\vec{E}^2)) & -\mathrm{i}\frac{4\pi}{c}S_3\\
-\mathrm{i}\frac{4\pi}{c}S_1 & -\mathrm{i}\frac{4\pi}{c}S_2 & -\mathrm{i}\frac{4\pi}{c}S_3 & \frac{1}{2}(\vec{H}^2+\vec{E}^2)
\end{pmatrix},
\end{aligned}\tag{5.6}$$

其中 $\vec{S}=\frac{c}{4\pi}(\vec{E}\times\vec{H})$ 是玻印亭矢量, $w=\frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2+\vec{H}^2)$ 是电磁场的能量密度.

容易验证 $\mathrm{Tr}(T)=0$. T_{ij} $(i,j=1,3)$ 称电磁场的 Maxwell 应力张量.

由 $\frac{\partial T_{\mu\alpha}}{\partial X_\alpha}=0$, 利用四维空间的高斯定理可得 $\oint T_{\mu\alpha}\mathrm{d}S_\alpha=0$, 所以 $\int T_{\mu\alpha}\mathrm{d}S_\alpha=\int T_{\mu4}\mathrm{d}V$ 是常数 (积分取在时间 t 给定), 即 $\int T_{\mu4}\mathrm{d}V$ 是守恒量.

也可用如下方法论证.

因为 $\frac{\partial T_{\mu\alpha}}{\partial X_\alpha}=0$, 此方程可表示为 $\frac{\partial T_{\mu i}}{\partial X_i}-\mathrm{i}\frac{1}{c}\frac{\partial T_{\mu4}}{\partial t}=0$, 对两边在整个三维空间

积分, 利用三维空间的高斯定理 $\int \frac{\partial T_{\mu i}}{\partial X_i}\mathrm{d}V = \oint T_{\mu i}\mathrm{d}S_i = 0$, 可以得到 $\int T_{\mu 4}\mathrm{d}V$ 是守恒量.

利用四维能量–动量张量的表达式 (5.6) 可得自由电磁场的总四动量

$$P_\mu = \frac{\mathrm{i}}{c}\int T_{\mu 4}\mathrm{d}V = \begin{pmatrix} \int \frac{\overrightarrow{S}}{c^2}\mathrm{d}V \\ \frac{\mathrm{i}\int w\mathrm{d}V}{c} \end{pmatrix} \text{是守恒量.}$$

以上讨论的是自由电磁场的能量–动量张量, 对于由带电粒子和它产生的电磁场组成的这一总系统, 也可定义能量–动量张量.

定义粒子系统的质量密度

$$\tau(\overrightarrow{r}) = \sum_\alpha m_\alpha \delta(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_\alpha).$$

因一个粒子的四动量为

$$p_\mu = mcu_\mu = \begin{pmatrix} m\gamma\overrightarrow{V} \\ \mathrm{i}\frac{\varepsilon}{c} \end{pmatrix},$$

所以粒子系统的四动量密度为 $\tau c u_\mu$.

可以定义粒子系统的能量–动量张量为

$$T^p_{\mu\nu} = -\tau c u_\mu u_\nu \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -\tau c \frac{\mathrm{d}X_\mu}{\mathrm{d}t} u_\nu,$$

因这给出 $T^p_{44} = \tau c^2 \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}$, 它是粒子的能量密度, 这与场的能量–动量张量的意义相符合.

电磁场与带电粒子系统的能量–动量张量之和为

$$T_{\mu\nu} = T^f_{\mu\nu} + T^p_{\mu\nu}, \quad T^f_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi}F_{\mu\sigma}F_{\nu\sigma} - \pounds\delta_{\mu\nu},$$

有

$$\frac{\partial T^f_{\mu\nu}}{\partial X_\mu} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial F_{\mu\sigma}}{\partial X_\mu}F_{\nu\sigma} + \frac{1}{4\pi}\left\{-F_{\mu\sigma}\frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial X_\mu} + \frac{1}{2}F_{\alpha\beta}\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial X_\nu}\right\}$$

$$
\begin{aligned}
=&-\frac{1}{4\pi}\left(-\frac{4\pi}{c}j_\sigma\right)F_{\nu\sigma}+\frac{1}{4\pi}\left\{-F_{\mu\sigma}\frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial X_\mu}+\frac{1}{2}F_{\mu\sigma}\left(-\frac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial X_\sigma}-\frac{\partial F_{\sigma\nu}}{\partial X_\mu}\right)\right\}\\
=&\frac{1}{c}F_{\nu\sigma}j_\sigma+\frac{1}{4\pi}\left\{-\frac{1}{2}F_{\mu\sigma}\left(\frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial X_\mu}+\frac{\partial F_{\sigma\nu}}{\partial X_\mu}\right)-\frac{1}{2}(F_{\mu\sigma}+F_{\sigma\mu})\frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial X_\mu}\right\}\\
=&\frac{1}{c}F_{\nu\sigma}j_\sigma,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial T^p_{\mu\nu}}{\partial X_\mu}=&-c\frac{\partial}{\partial X_\mu}\left(\tau\frac{\mathrm{d}X_\mu}{\mathrm{d}t}\right)u_\nu-\tau c\frac{\mathrm{d}X_\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\partial u_\nu}{\partial X_\mu}\\
=&-\tau c\frac{\mathrm{d}u_\nu}{\mathrm{d}t},
\end{aligned}
$$

其中用了关系式 $\dfrac{\partial}{\partial X_\mu}\left(\tau\dfrac{\mathrm{d}X_\mu}{\mathrm{d}t}\right)=0$ (质量守恒, 类似于电荷守恒).

由一个质量为 m 电荷为 e 的带电粒子在外场中的运动方程 $mc\dfrac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}s}=\dfrac{e}{c}F_{\mu\nu}u_\nu$ 可得连续介质在外场中的运动方程 $\tau c\dfrac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}s}=\dfrac{\rho}{c}F_{\mu\nu}u_\nu$, 即

$$
\tau c\frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}t}=\frac{\rho}{c}F_{\mu\nu}u_\nu c\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}=\frac{1}{c}F_{\mu\nu}j_\nu,
$$

所以 $\dfrac{\partial T^p_{\mu\nu}}{\partial X_\mu}=-\dfrac{1}{c}F_{\mu\nu}j_\nu$, 最终得到

$$
\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial X_\mu}=0,
$$

其中 $T_{\mu\nu}=T^f_{\mu\nu}+T^p_{\mu\nu}$.

此四维能量–动量张量有性质

$$
\mathrm{Tr}(T)=T_{\mu\mu}=T^p_{\mu\mu}=\sum_\alpha m_\alpha c^2\sqrt{1-\frac{V_\alpha^2}{c^2}}\delta(\vec{r}-\vec{r}_\alpha).
$$

因为

$$
\frac{\partial T_{\mu j}}{\partial X_\mu}=\frac{1}{c}\frac{\partial T_{4j}}{\partial t}+\frac{\partial T_{ij}}{\partial X_i}=0,
$$

两边对时间求平均得到

$$
\frac{\partial\overline{T}_{ij}}{\partial X_i}=0,
$$

由此可得

$$
\int X_j\frac{\partial\overline{T}_{ij}}{\partial X_i}\mathrm{d}V=-\int\left(\frac{\partial X_j}{\partial X_i}\right)\overline{T}_{ij}\mathrm{d}V=-\int\overline{T}_{jj}\mathrm{d}V=0,
$$

所以

$$
\int\overline{T}_{\mu\mu}\mathrm{d}V=\int\overline{T}_{jj}\mathrm{d}V+\int\overline{T}_{44}\mathrm{d}V=E=\sum_\alpha m_\alpha c^2\overline{\sqrt{1-\frac{V_\alpha^2}{c^2}}},
$$

由此得到

$$E = \sum_\alpha m_\alpha c^2 \overline{\sqrt{1 - \frac{V_\alpha^2}{c^2}}}, \tag{5.7}$$

其中 E 是电磁场与带电粒子系统的总能量.

式 (5.7) 是带电粒子系统的维里定理的相对论推广.

对式 (5.7) 取非相对论近似得到库仑场中经典力学的维里定理

$$E - \sum_\alpha m_\alpha c^2 = -\sum_\alpha \overline{\frac{m_\alpha V_\alpha^2}{2}} = -\overline{T}.$$

关于经典力学的维里定理推导如下:

系统的动能为 $T = \sum\limits_\alpha \dfrac{m_\alpha V_\alpha^2}{2}$, 则

$$\begin{aligned} 2T =& \sum_\alpha \frac{\partial T}{\partial \vec{V}\alpha} \cdot \vec{V}_\alpha = \sum_\alpha \vec{p}_\alpha \cdot \vec{V}_\alpha \\ =& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_\alpha \vec{p}_\alpha \cdot \vec{r}_\alpha\right) - \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{p}_\alpha}{dt} \\ =& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_\alpha \vec{p}_\alpha \cdot \vec{r}_\alpha\right) + \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \cdot \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_\alpha}, \end{aligned}$$

假定粒子的势能 $V(r) \propto r^k$, 得到

$$2\overline{T} = \overline{\sum_\alpha \vec{r}_\alpha \cdot \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_\alpha}} = k\overline{V},$$

此即经典力学的维里定理.

对于带电粒子在库仑势场中的运动, $k = -1$ 可得 $E = -\overline{T}$.

5.5 例 题

例题 5.1 给出相对论性理想气体的状态方程.

解 已经知道, 对于由点粒子组成的自由粒子系统, 能量–动量张量定义为

$$T_{\mu\nu}^p = -\tau c u_\mu u_\nu \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -\tau c \frac{\mathrm{d}X_\mu}{\mathrm{d}t} u_\nu,$$

其中 $\tau(\vec{r}) = \sum\limits_\alpha m_\alpha \delta(\vec{r} - \vec{r}_\alpha)$ 是质量密度.

对于连续介质的宏观物体也可定义能量–动量张量. 如果宏观物体的某一体积元静止, 则在此体积元静止的参照系中有 $T_{ij} = -p\delta_{ij}$, p 表示无宏观运动的连续介质的压强, 介质的能量–动量张量为

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w \end{pmatrix},$$

其中 w 是宏观介质的能量密度.

按照分子运动论的观点这种宏观的能量–动量张量是点粒子系统的微观能量–动量张量对单位体积中所有粒子取平均.

由此可得有全同粒子组成的相对论性理想气体的状态方程为

$$\begin{aligned} w =& nm\overline{\frac{c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}}, \\ p =& \frac{nm}{3}\overline{\frac{V^2}{\sqrt{1-\beta^2}}}, \end{aligned}$$

其中 n 是单位体积内的粒子数. 公式上面的横线表示对单位体积内的所有粒子取平均.

容易看出, 对于极端相对论性理想气体的状态方程为

$$p = \frac{w}{3}.$$

还应指出, 极端相对论性带电粒子系统一定是理想气体, 因为这时电磁场的贡献可以忽略.

第 6 章　介质中的 Mexwell 方程组

6.1　介质中 Mexwell 方程组的推导

假定 ρ 和 $\overrightarrow{j}$ 是微观的电荷和电流密度 (包括分子和原子中电子微观运动的贡献), 而 $\overrightarrow{e}$ 和 $\overrightarrow{h}$ 表示微观电场和磁场, 在第 5 章已经得到真空中的 Mexwell 方程组可表示为

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{e} = 4\pi\rho, \\
&\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{e} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{h}}{\partial t}, \\
&\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{h} = 0, \\
&\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{h} = \frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{e}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\overrightarrow{j}.
\end{aligned}$$

在介质中, 必须对 ρ 和 $\overrightarrow{j}$ 及 $\overrightarrow{e}$ 和 $\overrightarrow{h}$ 这些微观物理量在三维物理无穷小体积元中取平均才有意义.

所谓物理无穷小三维体积元是指:

(1) 它要足够小, 在数学意义上可视为连续变化的;

(2) 每个物理无穷小三维体积元中又要包含足够多的原子和分子, 使得物理量的平均值是连续可微函数.

物理量在物理无穷小三维体积元中的平均值有以下性质:

物理量对空间和时间导数的平均值分别等于该物理量的平均值对空间和时间的导数.

记 $\overline{\overrightarrow{e}} = \overrightarrow{E}, \overline{\overrightarrow{h}} = \overrightarrow{B}$, 则有

$$\begin{aligned}
&\overline{\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{e}} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overline{\overrightarrow{e}} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E}, \\
&\overline{\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{h}} = \overrightarrow{\nabla} \times \overline{\overrightarrow{h}} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{B}, \\
&\overline{\frac{\partial \overrightarrow{e}}{\partial t}} = \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}, \\
&\overline{\frac{\partial \overrightarrow{h}}{\partial t}} = \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t},
\end{aligned}$$

由此可得在介质中的 Mexwell 方程组为

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} &= 4\pi\overline{\rho}, \\
\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}, \\
\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B} &= 0, \\
\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{B} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\overline{\overrightarrow{j}}.
\end{aligned} \tag{6.1}
$$

在上式中

$$
\begin{aligned}
\overline{\rho} &= \rho_f + \overline{\rho}_P, \\
\overline{\overrightarrow{j}} &= \overrightarrow{j}_f + \overline{\overrightarrow{j}}_P + \overline{\rho\overrightarrow{V}},
\end{aligned}
$$

ρ_f 和 $\overrightarrow{j}_f$ 是自由电荷密度和自由电流密度, $\overline{\rho}_P$ 和 $\overline{\overrightarrow{j}}_P$ 称为极化电荷密度和极化电流密度, $\overline{\rho\overrightarrow{V}}$ 是分子电流的贡献.

引入矢量 $\overrightarrow{P}$ 使满足 $\overline{\rho}_P = -\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{P}$, 下面讨论 $\overrightarrow{P}$ 的物理意义.

因为

$$
\begin{aligned}
\int \overrightarrow{r}\overline{\rho}_P \mathrm{d}V &= -\int \overrightarrow{r}\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{P} \mathrm{d}V, \\
\overrightarrow{r}\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{P} &= (x\widehat{e_x} + y\widehat{e_y} + z\widehat{e_z})\left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}\right) \\
&= \widehat{e_x}\left(\frac{\partial(xP_x)}{\partial x} + \frac{\partial(xP_y)}{\partial y} + \frac{\partial(xP_z)}{\partial z} - P_x\right) \\
&\quad + \widehat{e_y}\left(\frac{\partial(yP_x)}{\partial x} + \frac{\partial(yP_y)}{\partial y} + \frac{\partial(yP_z)}{\partial z} - P_y\right) \\
&\quad + \widehat{e_z}\left(\frac{\partial(zP_x)}{\partial x} + \frac{\partial(zP_y)}{\partial y} + \frac{\partial(zP_z)}{\partial z} - P_x\right)
\end{aligned}
$$

只有对 $-\overrightarrow{P}$ 项积分不为零, 其他项积分都为零, 所以

$$
-\int \overrightarrow{r}\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{P} \mathrm{d}V = \int \overrightarrow{P} \mathrm{d}V.
$$

由此可得

$$
\int \overrightarrow{r}\overline{\rho}_P \mathrm{d}V = \int \overrightarrow{P} \mathrm{d}V.
$$

因为 $\int \overrightarrow{r}\overline{\rho}_P \mathrm{d}V$ 是体系的总极化电偶极矩, 所以 $\overrightarrow{P}$ 称为极化电偶极矩密度. 由 $\overline{\rho}_P = -\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{P}$, 它导致 $\dfrac{\partial \overline{\rho}_P}{\partial t} = -\overrightarrow{\nabla} \cdot \dfrac{\partial \overrightarrow{P}}{\partial t}$, 所以 $\overline{\overrightarrow{j}}_P = \dfrac{\partial \overrightarrow{P}}{\partial t}$ 是极化电流密度.

显然极化电荷密度和极化电流密度满足连续性方程

$$\frac{\partial \overline{\rho}_P}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{P}}{\partial t} = 0.$$

下面讨论分子电流的贡献 $\overline{\rho \overrightarrow{V}}$.

分子电流是指电子在分子或原子中做闭合轨道运动所形成的电流. 对于任何与电子的闭合轨道相交的截面, 通过此截面向左和向右的分子电流相等. 所以对任意封闭曲面总有

$$\oint \overline{\rho \overrightarrow{V}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{f} = 0,$$

由高斯定理可得

$$\int_V \overrightarrow{\nabla} \cdot (\overline{\rho \overrightarrow{V}}) \mathrm{d}V = 0.$$

这导致

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot (\overline{\rho \overrightarrow{V}}) = 0.$$

所以可以引入矢量 $\overrightarrow{M}$, 使得

$$\overline{\rho \overrightarrow{V}} = c \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{M} \quad (\text{因为} \overrightarrow{\nabla} \cdot (\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{M}) = 0 \text{满足} \overrightarrow{\nabla} \cdot (\overline{\rho \overrightarrow{V}}) = 0).$$

下面讨论这样引入的矢量 $\overrightarrow{M}$ 的物理意义.

由 $\displaystyle \frac{1}{2c} \int \overrightarrow{r} \times (\overline{\rho \overrightarrow{V}}) \mathrm{d}V = \frac{1}{2} \int \overrightarrow{r} \times (\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{M}) \mathrm{d}V$,

利用恒等式

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot (\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}) = \overrightarrow{A} \times (\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{B}) + (\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{\nabla}) \overrightarrow{B} + \overrightarrow{B} \times (\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}) + (\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\nabla}) \overrightarrow{A},$$

令 $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{r}$, $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{M}$ 及 $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{r} = 0$, 得到

$$\overrightarrow{r} \times (\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{M}) = \overrightarrow{\nabla} \cdot (\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{M}) - (\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{\nabla}) \overrightarrow{M} - (\overrightarrow{M} \cdot \overrightarrow{\nabla}) \overrightarrow{r}.$$

所以

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int \overrightarrow{r} \times (\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{M}) \mathrm{d}V \\ =& \frac{1}{2} \int (\overrightarrow{\nabla} \cdot (\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{M}) - (\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{\nabla}) \overrightarrow{M} - (\overrightarrow{M} \cdot \overrightarrow{\nabla}) \overrightarrow{r}) \mathrm{d}V \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=-\frac{1}{2}\int((\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\vec{M}+(\vec{M}\cdot\vec{\nabla})\vec{r})\mathrm{d}V\\
&=-\frac{1}{2}\int\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{M}\mathrm{d}V-\frac{1}{2}\int\left(M_x\frac{\partial}{\partial x}+M_y\frac{\partial}{\partial y}+M_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{r}\mathrm{d}V\\
&=-\frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial}{\partial x}(x\vec{M})+\frac{\partial}{\partial y}(y\vec{M})+\frac{\partial}{\partial z}(z\vec{M})-3\vec{M}\right)\mathrm{d}V\\
&\quad-\frac{1}{2}\int\left(M_x\frac{\partial}{\partial x}+M_y\frac{\partial}{\partial y}+M_z\frac{\partial}{\partial z}\right)(x\widehat{e_x}+y\widehat{e_y}+z\widehat{e_z})\,\mathrm{d}V\\
&=\frac{3}{2}\int\vec{M}\mathrm{d}V-\frac{1}{2}\int\vec{M}\mathrm{d}V=\int\vec{M}\mathrm{d}V.
\end{aligned}
$$

因为 $\frac{1}{2c}\int\vec{r}\times(\overline{\rho\vec{V}})\mathrm{d}V$ 是由分子电流给出的带电粒子系统的总磁偶极矩, 所以 $\vec{M}$ 是磁偶极矩密度.

对微观电荷密度和电流密度在物理无穷小三维体积元中平均后得到

$$
\begin{aligned}
\overline{\rho}&=\rho_f-\vec{\nabla}\cdot\vec{P},\\
\overline{\vec{j}}&=\vec{j}_f+\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}+c\vec{\nabla}\times\vec{M}.
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

令

$$
\vec{D}=\vec{E}+4\pi\vec{P},\vec{H}=\vec{B}-4\pi\vec{M},
$$

则由式 (6.1) 和式 (6.2) 可以得到介质中的 Mexwell 方程组最终形式为

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot\vec{D}&=4\pi\rho_f,\\
\vec{\nabla}\times\vec{E}&=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\\
\vec{\nabla}\cdot\vec{B}&=0,\\
\vec{\nabla}\times\vec{H}&=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\vec{j}_f.
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

其中 $\vec{D}=\vec{E}+4\pi\vec{P}=\varepsilon\vec{E}$ 称电感应强度, ε 称介电常数. $\vec{B}=\vec{H}+4\pi\vec{M}=\mu\vec{H}$ 称磁感应强度, μ 称导磁系数.

电磁场在界面上满足的边界条件

在介质 1 (ε_1,μ_1) 和介质 2 (ε_2,μ_2) 的分界面上边界条件可由介质中的 Mexwell 方程组得到.

对

$$
\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=4\pi\rho_f,\quad\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0
$$

应用高斯定理可得

$$\vec{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=0,\quad \vec{n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0.$$

对

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\quad \vec{\nabla}\times\vec{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\vec{j}_f$$

应用斯托克斯定理可得

$$\vec{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0,\quad \vec{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=0.$$

其中假定不存在自由面电荷密度和自由面电流密度, $\vec{n}$ 是介质 1 表面的正单位法线.

如果介质之一是导体, 则在导体内部有欧姆定律

$$\vec{j}=\sigma_c\vec{E},$$

σ_c 称为电导率.

对单一频率的场 (单色场), 可得方程

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\vec{j}_f=-\mathrm{i}\frac{\omega}{c}\varepsilon\vec{E}+\frac{4\pi\sigma_c}{c}\vec{E}=-\mathrm{i}\frac{\omega}{c}\varepsilon^c\vec{E},$$

由此得到

$$\varepsilon^c=\varepsilon+\mathrm{i}\frac{4\pi\sigma_c}{\omega}.$$

对于理想导体 $\sigma_c\to\infty$, 所以 $\varepsilon^c\to\mathrm{i}\infty$.

形式上可以将导体理解为 $\varepsilon^c(\omega)=\varepsilon+\mathrm{i}\dfrac{4\pi\sigma_c}{\omega}$ 的色散介质.

因为在理想导体内部电场和磁场恒为零, 对

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$

分别应用斯托克斯定理和高斯定理可得到在理想导体表面边界条件为

$$\vec{n}\times\vec{E}=0,\quad \vec{n}\cdot\vec{H}=0.$$

6.2 介质的色散 $\varepsilon(\omega)$

色散介质是指介质的介电常数与外加电场的频率有关, 它来源于 t 时刻的电感应强度不但与瞬时的外加电场强度有关, 还与过去的外加电场强度有关, 即

$$\vec{D}(\vec{X},t)=\vec{E}(\vec{X},t)+\int_0^{\infty}f(\tau)\vec{E}(\vec{X},t-\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{6.4}$$

因果性要求 $\tau\geqslant 0$ 且一般可假定 $f(\tau)\geqslant 0$.

形式上记 $\vec{D}=\hat{\varepsilon}\vec{E}$.

对于单色场 $\vec{E}(t)=\vec{E}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$, $\vec{E}$ 与时间无关, 可得 $\vec{D}=\varepsilon(\omega)\vec{E}$, 这里

$$\varepsilon(\omega)=1+\int_0^{\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau.$$

假定函数 $f(\tau)$ 连续有限, 且 $\tau\to\infty$ 时 $f(\tau)\to 0$.

定义 $f(\tau)=0\ (\tau<0)$, 则

$$\varepsilon(\omega)=1+\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau. \tag{6.5}$$

视 $\varepsilon(\omega)$ 为定义在 ω 复平面上的复变函数, 则它有如下性质:

(1) $\varepsilon(\omega)$ 在 ω 复平面的上半平面解析.

令 $\omega=\omega_R+\mathrm{i}\omega_I$, 则

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\propto\mathrm{e}^{-\omega_I\tau}\xrightarrow{\tau>0,\omega_I\to\infty}0,$$

所以 $\varepsilon(\omega)$ 在 ω 复平面的上半平面解析.

(2) 在 ω 复平面的实轴上, 令 $\varepsilon(\omega)=\varepsilon_R(\omega)+\mathrm{i}\,\varepsilon_I(\omega)$, 则 $\varepsilon_R(\omega)$ 是 ω 的偶函数; $\varepsilon_I(\omega)$ 是 ω 的奇函数 (因为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}=\cos(\omega\tau)+\mathrm{i}\sin(\omega\tau)$).

(3) 在 ω 的实轴上, $\varepsilon^*(\omega)=\varepsilon(-\omega)$, 因为 $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau})^*=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}$.

(4) 在 ω 的复平面上, $\varepsilon^*(\omega)=\varepsilon(-\omega^*)$, 特别是在 ω 的虚轴上, $\varepsilon^*(\mathrm{i}\omega_I)=\varepsilon(-(\mathrm{i}\omega_I)^*)=\varepsilon(\mathrm{i}\omega_I)$, 所以 $\varepsilon(\mathrm{i}\omega_I)$ 是实数.

(5) 记 $\alpha(\omega)=\varepsilon(\omega)-1$.

如果令 $\omega=\mathrm{i}\omega_I$, $\omega_I>0$, 容易得到

当 $\omega_I=0$ 时, $\alpha(0)=\int_0^{\infty}f(\tau)\mathrm{d}\tau=b_0>0$; 当 $\omega_I=\infty$ 时, $\alpha(\mathrm{i}\infty)=0$. 当 ω_I 从 0 变化到 ∞ 时, $\alpha(\omega)$ 从一正数 b_0 单调减小到 0.

6.3 计算 $\varepsilon(\omega)$ 的经典模型

假定介质中原子的电子以频率 ω_i 做阻尼振动. 在外电场 $\vec{E}$ 的作用下电子的运动方程为

$$m(\ddot{\vec{r}}+\gamma\dot{\vec{r}}+\omega_i^2\vec{r})=-e\vec{E},$$

其中 m 是电子质量.

还假定外加电场为 $\overrightarrow{E}=\overrightarrow{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ 且 $\overrightarrow{E}_0$ 与位置无关, 则可知 $\overrightarrow{r}\sim\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$, 所以方程的解为

$$\overrightarrow{r}=-\frac{e}{m}(\omega_i^2-\omega^2-\mathrm{i}\gamma\omega)^{-1}\overrightarrow{E},$$

由此可得一个电子的电偶极矩为

$$\overrightarrow{p}=-e\overrightarrow{r}=\frac{e^2}{m}(\omega_i^2-\omega^2-\mathrm{i}\gamma\omega)^{-1}\overrightarrow{E},$$

得到介质的电偶极矩密度

$$\overrightarrow{P}=\frac{Ne^2}{m}\sum_i f_i(\omega_i^2-\omega^2-i\gamma_i\omega)^{-1}\overrightarrow{E},$$

所以

$$\varepsilon(\omega)=1+4\pi\frac{Ne^2}{m}\sum_i f_i(\omega_i^2-\omega^2-\mathrm{i}\gamma_i\omega)^{-1}, \tag{6.6}$$

其中 $\sum\limits_i f_i=Z$, f_i 是一个原子中第 i 轨道的电子数, N 是单位体积内的原子数目.

因为在一般情况下 $\gamma_i\ll\omega_i$, 所以对于绝大多数频率 ω, 介电常数 $\varepsilon(\omega)$ 为实数. 当 $\omega<\omega_i$ 时因子 $(\omega_i^2-\omega^2)^{-1}$ 的值为正, 而当 $\omega>\omega_i$ 时它的值为负. 对于极低频的情况, 即 ω 比所有的 ω_i 都小时, 所有项的贡献都为正值因而有 $\varepsilon(\omega)>1$. 当随着 ω 的增大相继通过 ω_i 时, 则贡献为负值的项逐渐增加, 当 ω 比所有的 ω_i 都大时, 所有项的贡献都为负值因而给出 $\varepsilon(\omega)<1$. 当 ω 在 ω_i 邻近时 $\varepsilon(\omega)$ 有剧烈的变化. 在 $\omega=\omega_i$, 此项对实部的贡献为零而给出很大的纯虚部.

如果 $\varepsilon(\omega)$ 的实部随着 ω 的增大而增大称为正常色散, 如果 $\varepsilon(\omega)$ 的实部随着 ω 的增大而减小则称为反常色散.

由图 6.1 可以看出, 除了在共振频率邻近的区域之外, 所有其他的频率区域都是正常色散. 只有在共振频率邻近的区域才是反常色散区, 此时伴随有强烈的吸收.

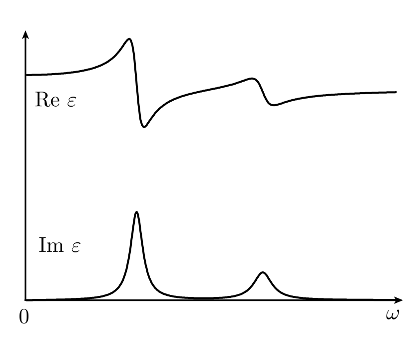


图 6.1　介电常数 $\varepsilon(\omega)$ 在两个共振附近的实部和虚部

因为 $\varepsilon(\omega)$ 大的正虚部表示电磁波的能量会耗散到介质中去, 所以 $\mathrm{Im}\varepsilon(\omega)$ 很大的区域称为共振吸收区.

对于金属可用类似的办法讨论. 它与介质的差别在于金属中存在着自由电子. 这些自由电子的固有频率可视为 $\omega_0 = 0$ 而它的宽度记为 γ_0 . 假定每个原子中有 f_0 个自由电子, 将这些自由电子对介电常数的贡献分离出来, 可以得到

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_b(\omega) + \mathrm{i}4\pi\frac{Ne^2}{m\omega}\frac{f_0}{\gamma_0 - \mathrm{i}\omega}.$$

其中

$$\varepsilon_b(\omega) = 1 + 4\pi\frac{Ne^2}{m}\sum_{i\neq 0} f_i(\omega_i^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\gamma_i\omega)^{-1}$$

是束缚态电子对介电常数的贡献.

比较公式 $\varepsilon^c = \varepsilon + \mathrm{i}\dfrac{4\pi\sigma_c}{\omega}$, 可得金属的电导率

$$\sigma_c = \frac{Ne^2}{m}\frac{f_0}{\gamma_0 - \mathrm{i}\omega}.$$

令 $f_0 = 1, \omega = 0$, 有

$$\sigma_c = \frac{Ne^2}{m}\frac{1}{\gamma_0} = N\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)\hbar c\frac{c^2}{mc^2}\frac{1}{\gamma_0}.$$

由金属的电导率 $\sigma_c \sim 10^{18}$, 可得 $\gamma_0 \sim 10^{12}$.

所以在相当大的频率范围内 ($\omega < 10^{11}$) 金属的电导率 σ_c 可视为是与频率无关的常数.

对于极高频的情况, 即对所有的 i 有 $\omega \gg \omega_i$, 这时原子中的电子可视为是自由的. 由表达式 (6.6) 可以得到

$$\varepsilon(\omega) = 1 - 4\pi\frac{NZe^2}{m\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \tag{6.7}$$

其中 $\omega_p = \sqrt{\dfrac{4\pi NZe^2}{m}} = \sqrt{\dfrac{4\pi n_0 e^2}{m}}$ 称等离子体的振荡频率.

应当指出, 对于电介质, 式 (6.7) 只有在 $\omega \gg \omega_i$ 的情况下才适用, 这时 $\varepsilon(\omega)$ 比 1 小一点且接近于 1. 对于地球的电离层或实验室中的稀薄等离子体, 式 (6.7) 适用于所有的频率.

6.4 介质中电磁场的能量守恒

对真空中的 Mexwell 方程组在介质的物理无穷小三维体积内求平均, 已得到

式 (6.1) 和式 (6.2), 由此可得

$$\overline{\overrightarrow{j}}\cdot\overrightarrow{E}=\frac{c}{4\pi}(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{B})\cdot\overrightarrow{E}-\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{E}^2,$$

而

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\nabla}\cdot(\overrightarrow{E}\times\overrightarrow{B})=&\overrightarrow{\nabla}_E\cdot(\overrightarrow{E}\times\overrightarrow{B})+\overrightarrow{\nabla}_B\cdot(\overrightarrow{E}\times\overrightarrow{B})\\=&\overrightarrow{B}\cdot(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{E})-\overrightarrow{E}\cdot(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{B})=-\frac{1}{2}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{B}^2-\overrightarrow{E}\cdot(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{B}),\end{aligned}$$

所以有

$$\overline{\overrightarrow{j}}\cdot\overrightarrow{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\overrightarrow{E}^2+\overrightarrow{B}^2}{8\pi}-\overrightarrow{\nabla}\left(c\frac{\overrightarrow{E}\times\overrightarrow{B}}{4\pi}\right),$$

即

$$\overline{\overrightarrow{j}}\cdot\overrightarrow{E}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\overrightarrow{E}^2+\overrightarrow{B}^2}{8\pi}=-\overrightarrow{\nabla}\cdot\left(\frac{c}{4\pi}\overrightarrow{E}\times\overrightarrow{B}\right).$$

利用

$$\overline{\overrightarrow{j}}\cdot\overrightarrow{E}=\left(\overrightarrow{j}_f+\frac{\partial\overrightarrow{P}}{\partial t}+c\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{M}\right)\cdot\overrightarrow{E},$$

而

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\nabla}\cdot(\overrightarrow{M}\times\overrightarrow{E})=&\overrightarrow{\nabla}_M\cdot(\overrightarrow{M}\times\overrightarrow{E})+\overrightarrow{\nabla}_E\cdot(\overrightarrow{M}\times\overrightarrow{E})\\=&\overrightarrow{E}\cdot(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{M})-\overrightarrow{M}\cdot(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{E})=\overrightarrow{E}\cdot(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{M})+\overrightarrow{M}\cdot\frac{1}{c}\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t},\end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{j}_f\cdot\overrightarrow{E}+\overrightarrow{E}\cdot\frac{\partial\overrightarrow{P}}{\partial t}+c\overrightarrow{\nabla}\cdot(\overrightarrow{M}\times\overrightarrow{E})-\overrightarrow{M}\cdot\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}+\frac{1}{4\pi}\left(\overrightarrow{E}\cdot\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}+\overrightarrow{B}\cdot\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}\right)\\=&-\overrightarrow{\nabla}\left(\frac{c}{4\pi}\overrightarrow{E}\times\overrightarrow{B}\right),\end{aligned}$$

即

$$\overrightarrow{j}_f\cdot\overrightarrow{E}+\frac{1}{4\pi}\left(\overrightarrow{E}\cdot\frac{\partial(\overrightarrow{E}+4\pi\overrightarrow{P})}{\partial t}+(\overrightarrow{B}-4\pi\overrightarrow{M})\cdot\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}\right)=-\overrightarrow{\nabla}\cdot\left(\frac{\overrightarrow{E}\times(\overrightarrow{B}-4\pi\overrightarrow{M})}{4\pi}\right).$$

最终得到

$$\overrightarrow{j}_f\cdot\overrightarrow{E}+\frac{1}{4\pi}\left(\overrightarrow{E}\cdot\frac{\partial\overrightarrow{D}}{\partial t}+\overrightarrow{H}\cdot\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}\right)=-\overrightarrow{\nabla}\cdot\left(\frac{c}{4\pi}\overrightarrow{E}\times\overrightarrow{H}\right).$$

如果 $\overrightarrow{j}_f=0$, 则

$$\frac{1}{4\pi}\left(\overrightarrow{E}\cdot\frac{\partial\overrightarrow{D}}{\partial t}+\overrightarrow{H}\cdot\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}\right)=-\overrightarrow{\nabla}\cdot\left(\frac{c}{4\pi}\overrightarrow{E}\times\overrightarrow{H}\right).$$

对于任意体积 V, 有

$$\int_V \frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)\mathrm{d}V=-\oint_s\left(\frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{H}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{S}, \tag{6.8}$$

此式既适用于 ε, μ 是实数常数的透明介质, 也适用于色散介质.

对于 ε, μ 是实数常数透明介质的情况, 有

$$\frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{B}\cdot\vec{H}}{8\pi}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\varepsilon\vec{E}^2+\mu\vec{H}^2}{8\pi}.$$

此时式 (6.8) 成为

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V\left(\frac{\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{B}\cdot\vec{H}}{8\pi}\right)\mathrm{d}V=-\oint_s\left(\frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{H}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{S}, \tag{6.9}$$

它表示 ε, μ 是实数常数的透明介质中电磁场的能量守恒.

$$w=\frac{\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{B}\cdot\vec{H}}{8\pi}=\frac{\varepsilon\vec{E}^2+\mu\vec{H}^2}{8\pi}$$

是电磁场在该介质中的能量密度, 而

$$\vec{S}=\frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{H}$$

是电磁场在该介质中的能流密度.

对于色散介质的情况, $\varepsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$ 一般有实部和虚部, 这时从式 (6.8) 出发进行讨论.

记 $\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\widehat{f}\vec{E}$, $\widehat{f}=\dfrac{\partial\widehat{\varepsilon}}{\partial t}$. 令电场随时间的变化有形式

$$\vec{E}(t)=\vec{E}_0(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t},$$

其中假定 $\vec{E}_0(t)$ 是时间的缓慢变化的函数.

如果 $\vec{E}_0(t)$ 是与时间无关的常数, 则

$$\widehat{f}\vec{E}=f(\omega_0)\vec{E},\quad f(\omega_0)=-\mathrm{i}\omega_0\varepsilon(\omega_0).$$

将 $\vec{E}_0(t)$ 用傅里叶分量 $\vec{E}_{0\alpha}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha t}$ 展开, $\vec{E}_{0\alpha}$ 与时间无关, 因为 $\vec{E}_0(t)$ 是时间的缓

慢变化的函数, 对于它的主要傅里叶组分有 $\alpha \ll \omega_0$, 所以

$$\begin{aligned}
\widehat{f}\vec{E}_{0\alpha}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_0+\alpha)t} =& f(\omega_0+\alpha)\vec{E}_{0\alpha}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_0+\alpha)t} \\
\approx& f(\omega_0)\vec{E}_{0\alpha}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_0+\alpha)t}+\alpha\frac{\mathrm{d}f(\omega_0)}{\mathrm{d}\omega_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_0+\alpha)t}, \\
\widehat{f}\vec{E}_0(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t} =& f(\omega_0)\vec{E}_0(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}+\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}f(\omega_0)}{\mathrm{d}\omega_0}\frac{\partial\vec{E}_0}{\partial t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}, \\
\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} =& -\mathrm{i}\omega_0\varepsilon(\omega_0)\vec{E}_0(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}+\frac{\mathrm{d}(\omega_0\varepsilon(\omega_0))}{\mathrm{d}\omega_0}\frac{\partial\vec{E}_0}{\partial t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}.
\end{aligned}$$

因为 $\vec{E}$ 和 $\vec{D}$ 及 $\vec{H}$ 是实数, 即

$$\vec{E}=\frac{1}{2}(\vec{E}+\vec{E}^*),\quad \vec{D}=\frac{1}{2}(\vec{D}+\vec{D}^*),\quad \vec{H}=\frac{1}{2}(\vec{H}+\vec{H}^*)$$

对方程 (6.8) 两边在一个周期 $\left(T=\dfrac{2\pi}{\omega_0}\right)$ 内取时间平均. 则可得到

$$\begin{aligned}
&\overline{\frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}(t)\cdot\frac{\partial\vec{D}(t)}{\partial t}+\vec{H}(t)\cdot\frac{\partial\vec{B}(t)}{\partial t}\right)} \\
=&\frac{1}{8\pi}\left[\omega_0\mathrm{Im}\varepsilon(\omega_0)|\vec{E}_0(t)|^2+\omega_0\mathrm{Im}\mu(\omega_0)|\vec{H}_0(t)|^2\right]+\frac{\partial w_{\mathrm{eff}}}{\partial t},
\end{aligned}$$

其中

$$w_{\mathrm{eff}}=\frac{1}{16\pi}\mathrm{Re}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega_0}(\omega_0\varepsilon(\omega_0))\right]|\vec{E}_0(t)|^2+\frac{1}{16\pi}\mathrm{Re}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega_0}(\omega_0\mu(\omega_0))\right]|\vec{H}_0(t)|^2$$

称为有效电磁能量密度.

利用 $\overline{\vec{E}\times\vec{H}}=\dfrac{1}{2}\left(\vec{E}_0\times\vec{H}_0^*\right)$, 则方程 (6.8) 成为

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\int_V w_{\mathrm{eff}}\mathrm{d}V+\int_V\frac{1}{8\pi}[\omega_0\mathrm{Im}\varepsilon(\omega_0)|\vec{E}_0(t)|^2+\omega_0\mathrm{Im}\mu(\omega_0)|\vec{H}_0(t)|^2]\mathrm{d}V \\
=&-\oint_S\frac{c}{8\pi}(\vec{E}_0(t)\times\vec{H}_0^*(t))\cdot\mathrm{d}\vec{S}.
\end{aligned}\tag{6.10}$$

式 (6.10) 是电磁场在耗散介质中的能量守恒方程. 方程的右边表示在单位时间内从表面 S 流入到体积 V 内的电磁能. 方程左边的第一项表示体积 V 中单位时间内有效电磁能的增加, 第二项则表示从表面流入的电磁能的剩余部分转化成了介质内能的其他形式: 热能 Q, 有

$$\mathrm{d}Q=\frac{1}{8\pi}[\omega_0\mathrm{Im}\varepsilon(\omega_0)|\vec{E}_0(t)|^2+\omega_0\mathrm{Im}\mu(\omega_0)|\vec{H}_0(t)|^2].$$

由热力学第二定律知道 $\mathrm{d}Q>0$, 由此可得到重要关系式:

当 $\omega>0$ 时, $\varepsilon''(\omega)>0$, $\mu''(\omega)>0$;

当 $\omega<0$ 时, $\varepsilon''(\omega)<0$,$\mu''(\omega)<0$.

由方程 (6.10) 可以看出, 如果 ε 和 μ 是实数常数, 则

$$w_{\text{eff}}=\frac{\varepsilon\vec{E}^2+\mu\vec{H}^2}{8\pi},$$

且 $\mathrm{d}Q=0$, 得到方程 (6.9).

如果 $\vec{E}_0(t)$(和 $\vec{H}_0(t)$) 与 t 无关, 则 $\dfrac{\partial w_{\text{eff}}}{\partial t}=0$, 在这种情况下从表面 S 流入的电磁能全部转换成了体积 V 中介质的热能.

6.5 Kramer-Kroning 关系

复变函数柯西定理:

若函数 $f(\omega)$ 在 ω 平面上的区域 V 中解析, C 是区域 V 中包围 z 点的任一封闭曲线, 则有公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\omega')}{\omega'-z}\mathrm{d}\omega'.$$

因介电常数 $\varepsilon(\omega)$ 在 ω 复平面的上半平面解析, 取 C 为实轴加 ω 复平面的上半平面无限大半圆.

首先证明, 在 ω 的上半平面无限大半圆上的积分为零.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau&=\int_0^\infty\left(f(0)+f'(0)\tau+\frac{1}{2!}f''(0)\tau^2+\cdots\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\\&=\left(f(0)+f'(0)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\mathrm{i}\omega)}+\frac{1}{2!}f''(0)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}(\mathrm{i}\omega)^2}+\cdots\right)\int_0^\infty\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\\&=\left(f(0)+f'(0)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\mathrm{i}\omega)}+\frac{1}{2!}f''(0)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}(\mathrm{i}\omega)^2}+\cdots\right)\left(-\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\right)\\&=\frac{\mathrm{i}f(0)}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\cdots,\end{aligned}$$

但 $f(\tau)$ 的连续性要求 $f(0)$ 必须为零, 因 $\tau<0$ 时 $f(\tau)=0$. 这导致

$$\int_0^\infty f(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau=\varepsilon(\omega)-1\propto\frac{1}{\omega^2}+\cdots,$$

由经典模型得到的 $\varepsilon(\omega)$ 的表达式容易看出对于很大的 ω 有

$$\varepsilon(\omega)-1\propto\frac{1}{\omega^2},$$

由此可得在 ω 复平面上半平面无限大半圆 (半径为 R) 上的积分为零. 所以

$$\varepsilon(z)=1+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^\infty\frac{\varepsilon(\omega')-1}{\omega'-z}\mathrm{d}\omega'.$$

取 $z=\omega+\mathrm{i}\delta$, 即 z 从 ω 的上半平面趋向于实轴, 有

$$\varepsilon(\omega)=1+\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon(\omega')-1}{\omega'-\omega-\mathrm{i}\delta}\mathrm{d}\omega'.$$

利用恒等式

$$\frac{1}{\omega'-\omega-\mathrm{i}\delta}=P\left(\frac{1}{\omega'-\omega}\right)+\mathrm{i}\pi\delta(\omega'-\omega),$$

这里 P 表示主值积分. 则可得到

$$\varepsilon(\omega)=1+\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon(\omega')-1}{\omega'-\omega}\mathrm{d}\omega'+\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}(\varepsilon(\omega)-1)\pi \mathrm{i},$$

即

$$\varepsilon(\omega)-1=\frac{1}{\pi \mathrm{i}}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon(\omega')-1}{\omega'-\omega}\mathrm{d}\omega'.$$

上式中令

$$\varepsilon(\omega)=\varepsilon_R(\omega)+\mathrm{i}\varepsilon_I(\omega),$$

由等式两边实部和虚部分别相等得到

$$\begin{aligned}\varepsilon_R(\omega)=&1+\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon_I(\omega')}{\omega'-\omega}\mathrm{d}\omega',\\ \varepsilon_I(\omega)=&-\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon_R(\omega')-1}{\omega'-\omega}\mathrm{d}\omega'.\end{aligned}$$

因为 $\varepsilon_R(\omega)$ 是 ω 的偶函数, $\varepsilon_I(\omega)$ 是 ω 的奇函数, 由此得到 Kramer-Kroning 关系 (通常记 $\varepsilon'=\varepsilon_R$, $\varepsilon''=\varepsilon_I$)

$$\varepsilon_R(\omega)=1+\frac{2}{\pi}P\int_0^{\infty}\frac{\omega'\varepsilon_I(\omega')}{\omega'^2-\omega^2}\mathrm{d}\omega' \tag{6.11}$$

$$\varepsilon_I(\omega)=-\frac{2\omega}{\pi}P\int_0^{\infty}\frac{\varepsilon_R(\omega')-1}{\omega'^2-\omega^2}\mathrm{d}\omega' \tag{6.12}$$

这里指出, 式 (6.11) 比式 (6.12) 更有实用价值.

对于某种电介质, 如果近似地知道介电常数的虚部 $\varepsilon''(\omega)$ 随频率的变化关系且满足必要条件: $\omega>0$ 时 $\varepsilon''(\omega)>0$, 则可用式 (6.11) 去得到物理上可接受的介电常数的实部, 因为它的大小和符号都没有物理限制.

相反, 如果只近似地知道介电常数的实部 $\varepsilon'(\omega)$, 由式 (6.12) 得到的 $\varepsilon''(\omega)$ 不一定能满足必要的物理要求: $\omega>0$ 时 $\varepsilon''(\omega)>0$.

由式 (6.11) 还可对 $\varepsilon''(\omega)$ 给出其他物理要求.

对于很大的 ω, 由式 (6.11) 得到

$$\varepsilon'(\omega)-1=-\frac{2}{\pi\omega^2}\int_0^\infty \chi\varepsilon''(\chi)\mathrm{d}\chi;$$

但对于很大的 ω 有

$$\varepsilon'(\omega)-1=-\frac{4\pi NZe^2}{m\omega^2},$$

由此可以得到对 $\varepsilon''(\omega)$ 的求和规则

$$\frac{m}{2\pi^2e^2}\int_0^\infty \omega\varepsilon''(\omega)\mathrm{d}\omega=NZ,$$

其中 N 是单位体积内的原子数,Z 是一个原子的电荷数.

因为在 ω 复平面的虚轴上 ε 是实数, 利用式 (6.11) 有

$$\varepsilon(\mathrm{i}\omega)-1=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\chi\varepsilon''(\chi)}{\chi^2+\omega^2}\mathrm{d}\chi,$$

由此可得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty[\varepsilon(\mathrm{i}\omega)-1]\mathrm{d}\omega=&\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \chi\varepsilon''(\chi)\mathrm{d}\chi\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega^2+\chi^2}\\=&\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \chi\varepsilon''(\chi)\mathrm{d}\chi\frac{\pi}{2\chi}=\int_0^\infty\varepsilon''(\omega)\mathrm{d}\omega.\end{aligned}$$

透明介质是指介电常数的虚部非常小的情况.

假定在 $\omega_1\ll\omega\ll\omega_2$ 频率范围内介质的吸收很弱, 则

$$\varepsilon(\omega)=1+\frac{2}{\pi}\int_{\omega_2}^\infty\frac{\varepsilon''(\chi)\mathrm{d}\chi}{\chi}-\frac{2}{\pi\omega^2}\int_0^{\omega_1}\chi\varepsilon''(\chi)\mathrm{d}\chi,$$

所以在此频率范围内介质的介电常数有形式

$$\varepsilon(\omega)=a-\frac{b}{\omega^2},$$

其中 a,b 是正实数.

6.6 例　　题

例题 6.1　假定介质的分子是极化的, 每个分子有电偶极矩 $\vec{d}_0$, 求介质的介电常数.

解 当无外电场时, 分子极化方向是无规分布. 当有外电场时, 分子因带有电偶极矩得到能量 $U=-\overrightarrow{d}_0\cdot\overrightarrow{E}$, 即电偶极矩沿电场方向排列时能量最低. 如介质的温度为 T, 则分子的玻尔兹曼分布为 $n\propto \mathrm{e}^{-\frac{U}{kT}}=\mathrm{e}^{\frac{\overrightarrow{d}_0\cdot\overrightarrow{E}}{kT}}=\mathrm{e}^{x\cos\theta}$, 这里 $x=\dfrac{d_0E}{kT}$. 沿电场方向的极化

$$
\begin{aligned}
P=\int d_0\cos\theta\mathrm{d}n(\theta)=&\frac{N\displaystyle\int d_0\cos\theta\mathrm{e}^{x\cos\theta}\mathrm{d}\Omega}{\displaystyle\int \mathrm{e}^{x\cos\theta}\mathrm{d}\Omega}\\
=&Nd_0\left(\coth x-\frac{1}{x}\right)\approx\frac{Nd_0^2E}{3kT}\quad(x\ll1),
\end{aligned}
$$

其中 N 是单位体积内的分子数.

所以 $\overrightarrow{P}=\dfrac{Nd_0^2}{3kT}\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{D}=\overrightarrow{E}+4\pi\overrightarrow{P}=\varepsilon\overrightarrow{E}$, 则可得到介质的介电常数

$$
\varepsilon=1+4\pi\frac{Nd_0^2}{3kT}.
$$

第 7 章　恒定电磁场 (I)

7.1　恒定电场和库仑定律

经典电动力学发展的历史是首先确立了静电场的库仑定律，然后是建立恒定磁场的基本方程以及电磁感应定律，最后才总结出了 Mexwell 方程组. 这里把静电场视为 Mexwell 方程组的特殊情况

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} = 0, \tag{7.1}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} = 4\pi\rho. \tag{7.2}$$

由 (7.1) 可引入标量势 ϕ 使其满足

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla} \cdot \phi, \tag{7.3}$$

由此可得标量势 ϕ 满足泊松方程

$$\nabla^2\phi = -4\pi\rho, \tag{7.4}$$

在电荷密度 $\rho = 0$ 的区域, 我们得到拉普拉斯方程

$$\nabla^2\phi = 0. \tag{7.5}$$

首先讨论电荷分布定域在空间的有限区域，且在整个空间没有任何边界面限制的情况, 这时借助方程 (7.1)∼ 方程 (7.3) 就够了.

如果点电荷 e 放在坐标原点，则电荷密度可表示为

$$\rho = e\delta(\overrightarrow{r}).$$

取中心在原点半径为 r 的球体 V, 球表面为 S . 由式 (7.2) 可得

$$\int_V \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E}\mathrm{d}V = \int_V 4\pi e\delta(\overrightarrow{r})\mathrm{d}V = 4\pi e.$$

利用高斯定理有

$$\int_V \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E}\mathrm{d}V = \oint_S \overrightarrow{\mathrm{d}s} \cdot \overrightarrow{E} = 4\pi r^2 \mid \overrightarrow{E} \mid$$

由此可得

$$\vec{E} = \frac{e\vec{r}}{r^3},$$

要求标量势满足在无穷远处为零的边界条件，则由式 (7.3) 可得

$$\phi = \frac{e}{r}.$$

如果将点电荷 e 放在 $\vec{r}_A$ 点，则在 $\vec{r}$ 处的静电势为

$$\phi = \frac{e}{|\vec{R}|},$$

电场强度为

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = \frac{\vec{R}}{R^3},$$

其中 $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_A$.

由此得到重要公式

$$\nabla_r^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_A|} = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}_A),$$

函数

$$G(\vec{r}, \vec{r}_A) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_A|}$$

称泊松方程满足在无穷远处为零的边界条件的格林函数.

借助此格林函数可得泊松方程 (7.4) 的一个特解为

$$\phi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\mathrm{d}\vec{r}', \tag{7.6}$$

与格林函数 $G(\vec{r}, \vec{r}_A)$ 一样，此特解也满足在无穷远处为零的边界条件.

对于由点电荷组成的带电粒子系统, 式 (7.6) 成为

$$\phi(\vec{r}) = \sum_\alpha \frac{e_\alpha}{|\vec{r} - \vec{r}_\alpha|}.$$

因为静电场的能量密度为

$$w = \frac{1}{8\pi}\vec{E}^2,$$

所以静电场的总能量

$$\begin{aligned} U &= \int w\mathrm{d}V = \frac{1}{8\pi}\int \vec{E}\cdot\vec{E}\mathrm{d}V = -\frac{1}{8\pi}\int \vec{E}\cdot\vec{\nabla}\phi\mathrm{d}V \\ &= \frac{1}{8\pi}\int \phi\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int \phi\rho\mathrm{d}V. \end{aligned}$$

特例：

对于两个点电荷构成的体系，e_A 放在 $\overrightarrow{r}_A$ 点, e_B 放在 $\overrightarrow{r}_B$ 点, 则

$$\rho_A(\overrightarrow{r}) = e_A\delta(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_A),$$

$$\rho_B(\overrightarrow{r}) = e_B\delta(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_B).$$

$$\phi = \phi_A + \phi_B,$$

$$\phi_A = \frac{e_A}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_A|},$$

$$\phi_B = \frac{e_B}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_B|}.$$

体系的静电能为

$$U = U_1 + U_2 + U_{12},$$

$$U_1 + U_2 = \frac{1}{2}\int \rho_A\phi_A \mathrm{d}V + \frac{1}{2}\int \rho_B\phi_B \mathrm{d}V,$$

$$U_{12} = \frac{1}{2}\int \rho_A\phi_B \mathrm{d}V + \frac{1}{2}\int \rho_B\phi_A \mathrm{d}V = \frac{e_A e_B}{|\overrightarrow{r}_A - \overrightarrow{r}_B|}.$$

U_{12} 称为电荷 e_A 与电荷 e_B 的相互作用能.

容易看出 U_1 和 U_2 是无穷大，例如

$$\frac{1}{2}\int \rho_A\phi_A \mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int e_A\delta(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_A)\frac{e_A}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_A|}\mathrm{d}V \to \infty.$$

无穷大的出现表明经典电动力学有适用范围.

当 $\dfrac{e^2}{R} \sim mc^2$ 时，可能会出现电子的产生或消灭的过程，即经典电动力学不再适用，由此可得 $R_c \sim \dfrac{e^2}{mc^2}$，它是电子的经典半径.

经典电动力学的适用范围是 $r > R_c$. 但应当指出 R_c 比经典力学的适用范围小许多.

假定出现量子效应的尺度为 a, 则由 $ap \sim \hbar$ 导致经典力学的适用范围

$$a \sim \frac{\hbar}{p}.$$

由 $p \sim mc$ 得到 $a \sim \dfrac{\hbar}{mc}$. 所以 $\dfrac{R_c}{a} \sim \dfrac{e^2}{\hbar c} \sim \dfrac{1}{137}$.

7.2 匀速直线运动的电荷产生的场

假定点电荷 e 在 K' 系中沿 1 轴以速度 $\overrightarrow{V}$ 匀速运动，则在 K 系 (与电荷一起运动的坐标系) 中四维电磁势为

$$A_\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i}\phi \end{pmatrix},$$

其中

$$\phi = \frac{e}{R}, \quad R = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}.$$

则在 K' 系 (电荷沿 1 轴以速度 $\overrightarrow{V}$ 运动) 中四维电磁势为

$$\begin{pmatrix} A_1' \\ A_2' \\ A_3' \\ \mathrm{i}\phi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\mathrm{i}\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{i}\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathrm{i}\phi \end{pmatrix}.$$

又由关系式

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \mathrm{i}ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \mathrm{i}\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{i}\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ \mathrm{i}ct' \end{pmatrix}$$

得到

$$\begin{aligned} R =& (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{(x' - Vt')^2}{1 - \dfrac{V^2}{c^2}} + x_2'^2 + x_3'^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ =& \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} \left((x' - Vt')^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)(x_2'^2 + x_3'^2) \right)^{\frac{1}{2}} \\ =& \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} R^\bullet, \end{aligned}$$

其中

$$R^\bullet = R'\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}, \quad R' = ((x' - Vt')^2 + x_2'^2 + x_3'^2)^{\frac{1}{2}}.$$

由此可得

$$\phi' = \frac{e}{R^{\bullet}}, \quad \overrightarrow{A'} = \frac{e\overrightarrow{V}}{cR^{\bullet}} = \frac{1}{c}\phi'\overrightarrow{V}.$$

则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{E'} &= -\overrightarrow{\nabla'}\phi' - \frac{1}{c}\frac{\partial\overrightarrow{A'}}{\partial t'} \\ &= \left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\frac{e}{R^{\bullet 3}}\{(x'-Vt')\widehat{e}_1 + x_2'\widehat{e}_2 + x_3'\widehat{e}_3\} \\ &= e\frac{1-\dfrac{V^2}{c^2}}{\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{\overrightarrow{R'}}{R'^3}.\end{aligned}$$

如果离开带电粒子的距离 R' 给定, 则

$$E'_{//} = \frac{e}{R'^2}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right),$$

$$E'_{\perp} = \frac{e}{R'^2}\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}},$$

$$\overrightarrow{H'} = \overrightarrow{\nabla'}\times\overrightarrow{A'} = \overrightarrow{\nabla'}\times\left(\frac{1}{c}\phi'\overrightarrow{V}\right) = \frac{1}{c}\overrightarrow{\nabla'}\phi'\times\overrightarrow{V} = \frac{1}{c}\overrightarrow{V}\times\overrightarrow{E'}.$$

对极端相对论的情况 $\dfrac{V}{c}\to 1$, 容易看出

$$E'_{//}\to 0, \quad E'_{\perp}\to\infty,$$

即 $\overrightarrow{E}'$ 集中在 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, $\Delta\theta \sim \sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}$ 的区域内.

对于离开运动粒子轨迹的垂直距离为 b 的一个给定点 $(0,b,0)$, 则快速运动粒子在此点产生的电场

$$E'_{\perp} = \frac{e\gamma b}{((\gamma Vt')^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{这里令 } t'=0 \text{ 时 } x'=0),$$

即在 $t'=0$ 处有尖锐峰, 峰的高度为 $(E'_{\perp})_{\max} = \dfrac{e\gamma}{b^2}$, 峰的宽度为 $t' = \dfrac{b}{\gamma V}$.

对于非相对论近似 $\dfrac{V}{c}\ll 1$ 的情况, 有

$$\overrightarrow{E'} = \frac{e\overrightarrow{R'}}{R'^3}, \quad \overrightarrow{H'} = \frac{e\overrightarrow{V}\times\overrightarrow{R'}}{R'^3},$$

其中,

$$R' = ((x'-Vt')^2 + x_2'^2 + x_3'^2)^{\frac{1}{2}}.$$

7.3 静电场的多极展开

假定点电荷系统定域分布在体积 V 内, 则 $\overrightarrow{R}$ 处观测的电场为

$$\phi(\overrightarrow{R}) = \sum_i \frac{e_i}{R_i} = \sum_i \frac{e_i}{|\overrightarrow{R} - \overrightarrow{r}_i|}.$$

当 $R \gg r_i$ 时, 对 $f(\overrightarrow{R} - \overrightarrow{r}_i) = \dfrac{1}{|\overrightarrow{R} - \overrightarrow{r}_i|}$ 可作泰勒展开,

$$f(\overrightarrow{R} - \overrightarrow{r}_i) \approx f(\overrightarrow{R}) + f_1 + f_2 + \cdots,$$

则得到

$$\phi(\overrightarrow{R}) = \phi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \cdots,$$

其中 $\phi_0 = \dfrac{\sum_i e_i}{R}$，对电中性系统 $\sum_i e_i = 0$. $\phi_1 = -\sum_i e_i \overrightarrow{r}_i \cdot \overrightarrow{\nabla} f(\overrightarrow{R}) = \dfrac{\overrightarrow{d} \cdot \overrightarrow{R}}{R^3}$, 这里 $\overrightarrow{d} = \sum_i e_i \overrightarrow{r}_i$ 是带电粒子系统的电偶极矩. 它对电场强度的贡献为

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{E} &= -\overrightarrow{\nabla}\phi_1 = -\overrightarrow{\nabla}\left(\frac{\overrightarrow{d} \cdot \overrightarrow{R}}{R^3}\right) \\
&= \frac{3(\overrightarrow{d} \cdot \overrightarrow{R})\overrightarrow{R}}{R^5} - \frac{\overrightarrow{d}}{R^3} \\
&= \frac{3(\overrightarrow{d} \cdot \overrightarrow{n})\overrightarrow{n} - \overrightarrow{d}}{R^3}, \quad R \neq 0, \quad \left(\overrightarrow{n} = \frac{\overrightarrow{R}}{R}\right).
\end{aligned}$$

推导上式时用了公式

$$\overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{d} \cdot \overrightarrow{R}) = \left(\widehat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \widehat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \widehat{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)(xd_x + yd_y + zd_z) = \overrightarrow{d}.$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}\sum_i e_i x_\alpha^i x_\beta^i \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}\left(\frac{1}{R}\right),$$

因为 $\sum_{\alpha,\beta} \delta_{\alpha\beta} \dfrac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}\left(\dfrac{1}{R}\right) = \nabla^2\left(\dfrac{1}{R}\right) = 0 \quad (R \neq 0)$, 有

$$\phi_2 = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}\sum_i e_i (x_\alpha^i x_\beta^i - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta} r_i^2) \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}\left(\frac{1}{R}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{\alpha,\beta}\sum_{i} e_i(3x_\alpha^i x_\beta^i - \delta_{\alpha\beta} r_i^2)\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}\left(\frac{1}{R}\right).$$

体系的电四极矩定义为

$$D_{\alpha\beta} = \sum_i e_i(3x_\alpha^i x_\beta^i - \delta_{\alpha\beta} r_i^2),$$

它有九个分量. 因为 $D_{\alpha\beta} = D_{\beta\alpha}$ ，并且有 $\sum\limits_\alpha D_{\alpha\alpha} = 0$, 所以它只有五个分量是独立的.

系统的空间取向可确定三个分量, 所以在粒子系统的本体坐标系中电四极矩只有两个独立分量.

由 $\dfrac{\partial}{\partial X_\alpha}\left(\dfrac{1}{R}\right) = -\dfrac{X_\alpha}{R^3}$ 及 $\dfrac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}\left(\dfrac{1}{R}\right) = \dfrac{3X_\alpha X_\beta}{R^5} - \delta_{\alpha\beta}\dfrac{1}{R^3}$ 可得

$$\phi_2 = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} D_{\alpha\beta}\frac{n_\alpha n_\beta}{R^3}, \quad \left(\vec{n} = \frac{\vec{R}}{R}\right).$$

借助公式

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\vec{R} - \vec{r}|} &= \frac{1}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\chi}} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\frac{r^\ell}{R^{\ell+1}}\frac{4\pi}{2\ell+1}Y_{\ell m}^*(\varTheta, \varPhi)Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi),\end{aligned}$$

则静电势可以表示为

$$\phi = \frac{1}{R^{\ell+1}}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}Q_{\ell m}Y_{\ell m}^*(\varTheta, \varPhi),$$

其中

$$Q_{\ell m} = \sum_i e_i r_i^\ell \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}Y_{\ell m}(\vartheta_i, \varphi_i).$$

对于给定的 ℓ, 这 $2\ell+1$ 个独立的量称为带电粒子系统的 2^ℓ 极矩.

容易验证，量 Q_{1m} 与前面定义的电偶极矩 $\vec{d}$ 的分量有关系

$$Q_{10} = d_z,$$

$$Q_{1\pm 1} = \mp 1\frac{1}{\sqrt{2}}(d_x \pm \mathrm{i}d_y);$$

量 Q_{2m} 与前面定义的电四极矩 $D_{\alpha\beta}$ 有关系

$$Q_{20}=\frac{1}{2}D_{zz},$$

$$Q_{2\pm1}=\mp\frac{1}{\sqrt{6}}(D_{xz}\pm \mathrm{i}D_{yz}),$$

$$Q_{2\pm2}=\frac{1}{2\sqrt{6}}(D_{xx}-D_{yy}\pm 2\mathrm{i}D_{xy}).$$

7.4 外电场中的带电粒子系统

带电粒子系统在恒定外电场中的能量为

$$E=\sum_i\varepsilon_i+\sum_i e_i\phi(\overrightarrow{r}_i),$$

其中 $U=\sum\limits_i e_i\phi(\overrightarrow{r}_i)$ 是外电场给出的能量. $\phi(\overrightarrow{r}_i)$ 是外电场的电势，假定在有电荷分布的区域它是空间缓慢变化的函数, 则可对 $\phi(\overrightarrow{r}_i)$ 在 $\overrightarrow{R}$ 处作泰勒展开, 有

$$U=U_0+U_1+U_2+\cdots.$$

其中 $U_0=\phi_0(\overrightarrow{R})\sum\limits_i e_i=0$(对电中性系统 $U_0=0$). $U_1=(\overrightarrow{\nabla}\phi)_0\cdot\sum\limits_i e_i\overrightarrow{r}_i=-\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{d}$ 是系统的电偶极矩在外电场中的能量.

精确到一阶项, 外加恒定电场对带电粒子体系的总作用力和力矩分别为

$$\overrightarrow{F}=-\overrightarrow{E}_0\sum_i e_i+\overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{d})=(\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{E}\quad(\text{对电中性系统}),$$

$$\overrightarrow{K}=\sum_i(\overrightarrow{r}_i\times e_i\overrightarrow{E}_0)=\overrightarrow{d}\times\overrightarrow{E}_0.$$

二阶近似给出 $U_2=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{\alpha,\beta}\sum\limits_i e_i x_\alpha^i x_\beta^i\left(\dfrac{\partial^2\phi}{\partial X_\alpha\partial X_\beta}\right)_0$, 因为 $(\nabla^2\phi)_0=0$ 可得

$$\begin{aligned}U_2=&\frac{1}{6}\sum_{\alpha,\beta}\sum_i(3e_i x_\alpha^i x_\beta^i-\delta_{\alpha\beta}r_i^2)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial X_\alpha\partial X_\beta}\right)_0\\=&\frac{1}{6}\sum_{\alpha,\beta}D_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial X_\alpha\partial X_\beta}\right)_0,\end{aligned}$$

它是系统的电四极矩在外电场中的能量.

由此式可知要想确定系统的电四极矩, 需要知道外加电场梯度.

7.5 恒定磁场 (稳定电流产生的磁场)

磁场 $\vec{H}$ 满足 Mexwell 方程

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{H}=0,$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\vec{j},$$

一般情况 $\vec{H},\vec{E},\vec{j}$ 都是 $(\vec{r},t)$ 的函数.

在给定的点 $\vec{r}$ 对时间取平均, 则

$$\overline{\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\mathrm{d}t=\frac{1}{T}(\vec{E}(\vec{r},T)-\vec{E}(\vec{r},0)),$$

所以当 $T\to\infty$ 时, 可得 $\overline{\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}}=0$.

$\vec{H}$ 的时间平均为恒定磁场. 所以对恒定磁场有

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{H}=0,$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\frac{4\pi}{c}\overline{\vec{j}}.$$

令 $\vec{H}=\vec{\nabla}\times\overline{\vec{A}}$, 则

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\overline{\vec{A}})-\vec{\nabla}^2\overline{\vec{A}}=\frac{4\pi}{c}\overline{\vec{j}},$$

取规范 $\vec{\nabla}\cdot\overline{\vec{A}}=0$ 时，有矢量势方程

$$\vec{\nabla}^2\overline{\vec{A}}=-\frac{4\pi}{c}\overline{\vec{j}}. \tag{7.7}$$

类比泊松方程的解 (7.6) 可得此矢量势方程的解为

$$\overline{\vec{A}}(\vec{r})=\frac{1}{c}\int\frac{\overline{\vec{j}}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}\vec{r}'. \tag{7.8}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\vec{H}(\vec{r})&=\vec{\nabla}\times\overline{\vec{A}}\\&=\frac{1}{c}\int\frac{\overline{\vec{j}}(\vec{r}')\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\mathrm{d}\vec{r}',\end{aligned} \tag{7.9}$$

这就是 Biot-Savart 定律.

对于由点电荷组成的粒子系统, 有

$$\overline{c\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r},t)}=\sum_a\overline{\frac{e_a\overrightarrow{V}_a}{|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r}_a|}}\approx\frac{1}{r}\overline{\sum_a e_a\overrightarrow{V}_a}-\overline{\sum_a e_a\overrightarrow{V}_a(\overrightarrow{r}_a\cdot\overrightarrow{\nabla})\frac{1}{r}}.$$

因为 $\frac{1}{r}\overline{\sum_a e_a\overrightarrow{V}_a}=\frac{1}{r}\overline{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_a e_a\overrightarrow{r}_a}=0$, 有

$$\overline{c\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r},t)}=-\overline{\sum_a e_a\overrightarrow{V}_a(\overrightarrow{r}_a\cdot\overrightarrow{\nabla})\frac{1}{r}}=\frac{1}{r^3}\overline{\sum_a e_a\overrightarrow{V}_a(\overrightarrow{r}_a\cdot\overrightarrow{r})}.$$

又因为

$$\begin{aligned}
&e_a\overrightarrow{V}_a(\overrightarrow{r}_a\cdot\overrightarrow{r})\\
=&\frac{1}{2}e_a\overrightarrow{V}_a(\overrightarrow{r}_a\cdot\overrightarrow{r})+\frac{1}{2}e_a\overrightarrow{V}_a(\overrightarrow{r}_a\cdot\overrightarrow{r})\\
=&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e_a\overrightarrow{r}_a(\overrightarrow{r}_a\cdot\overrightarrow{r}))-\frac{1}{2}e_a\overrightarrow{r}_a(\overrightarrow{V}_a\cdot\overrightarrow{r})+\frac{1}{2}e_a\overrightarrow{V}_a(\overrightarrow{r}_a\cdot\overrightarrow{r})\\
=&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e_a\overrightarrow{r}_a(\overrightarrow{r}_a\cdot\overrightarrow{r}))+\frac{1}{2}e_a(\overrightarrow{r}_a\times\overrightarrow{V}_a)\times\overrightarrow{r},
\end{aligned}$$

所以得到

$$\overline{\overrightarrow{A}}=\frac{1}{r^3}\frac{1}{2c}\sum_a\overline{e_a(\overrightarrow{r}_a\times\overrightarrow{V}_a)}\times\overrightarrow{r}=\frac{\overrightarrow{m}\times\overrightarrow{r}}{r^3},$$

其中 $\overrightarrow{m}=\frac{1}{2c}\sum_a\overline{e_a(\overrightarrow{r}_a\times\overrightarrow{V}_a)}$ 是系统的磁偶极矩.

可以证明带电粒子系统的磁偶极矩与坐标选取无关, 因为

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2c}\sum_a\overline{e_a((\overrightarrow{r}_a+\overrightarrow{b})\times\overrightarrow{V}_a)}=&\overrightarrow{m}+\frac{1}{2c}\overrightarrow{b}\times\overline{\sum_a e_a\overrightarrow{V}_a}\\
=&\overrightarrow{m}+\frac{1}{2c}\overrightarrow{b}\times\overline{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_a e_a\overrightarrow{r}_a\right)}=\overrightarrow{m}.
\end{aligned}$$

由 $\overline{\overrightarrow{A}}=\frac{\overrightarrow{m}\times\overrightarrow{r}}{r^3}$, 则有

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{H}=&\overrightarrow{\nabla}\times\overline{\overrightarrow{A}}=\overrightarrow{\nabla}\times\left(\overrightarrow{m}\times\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}\right)\\
=&\overrightarrow{m}\left(\overrightarrow{\nabla}\cdot\frac{\overrightarrow{r}}{R^r}\right)-\left(\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}.
\end{aligned}$$

利用

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{\vec{r}}{r^3},\quad \vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}=-\vec{\nabla}^2\left(\frac{1}{r}\right)=0\quad (r\neq 0)$$

和

$$(\vec{m}\cdot\vec{\nabla})\frac{\vec{r}}{r^3}=\frac{1}{r^3}(\vec{m}\cdot\vec{\nabla})\vec{r}+\vec{r}(\vec{m}\cdot\vec{\nabla})\frac{1}{r^3}=\frac{\vec{m}}{r^3}-\frac{3\vec{r}(\vec{m}\cdot\vec{r})}{r^5},$$

最终得到

$$\vec{H}=\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{n})\vec{n}-\vec{m}}{r^3}.$$

对于连续电流密度的情况，系统的磁矩为

$$\vec{m}=\frac{1}{2c}\int_V \vec{r}\times\vec{j}\,\mathrm{d}\vec{r}.$$

特别是电流强度为 I 的闭合回路电流，有

$$\vec{m}=\frac{I}{2c}\oint_C \vec{r}\times\mathrm{d}\vec{\ell},$$

其中线积分沿闭合回路 C 进行. 可以看出，磁矩与回路 C 围成的曲面形状无关. 如果回路在平面上，则

$$\vec{m}=\frac{IS}{2c}\vec{n},\tag{7.10}$$

其中 S 是回路在平面上围成的面积，$\vec{n}$ 是平面的法线方向，它与回路电流方向满足右手定则.

7.6 拉莫定理

假定带电粒子系统的拉格朗日量为

$$L=-\sum_\alpha m_\alpha c^2\sqrt{1-\frac{V_\alpha^2}{c^2}}-U,$$

取非相对论近似

$$L\approx\sum_\alpha\frac{m_\alpha}{2}\vec{V}_\alpha^2-U.$$

在外加电磁场中，

$$L_1=\sum_\alpha\frac{m_\alpha}{2}\vec{V}_\alpha^2-U+\sum_\alpha\frac{e_\alpha}{c}\vec{A}\cdot\vec{V}_\alpha-\sum_\alpha e_\alpha\phi.$$

如果外场为均匀恒定磁场 $\overrightarrow{H}$, 则可取

$$\overrightarrow{A}=\frac{1}{2}\overrightarrow{H}\times\overrightarrow{r},\quad \phi=0.$$

由

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha}\frac{e_{\alpha}}{c}\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{V}_{\alpha}=&\frac{1}{2}\sum_{\alpha}\frac{e_{\alpha}}{c}(\overrightarrow{H}\times\overrightarrow{r}_{\alpha})\cdot\overrightarrow{V}_{\alpha}\\=&\overrightarrow{H}\cdot\frac{1}{2c}\sum_{\alpha}(e_{\alpha}\overrightarrow{r}_{\alpha}\times\overrightarrow{V}_{\alpha})\\=&\overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{m},\end{aligned}$$

可得带电粒子系统在恒定外磁场中的拉格朗日量为

$$\begin{aligned}L_1&=\sum_{\alpha}\frac{m_{\alpha}}{2}\overrightarrow{V}_{\alpha}^2-U+\overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{m}\\&=\sum_{\alpha}\frac{m_{\alpha}}{2}\overrightarrow{V}_{\alpha}^2-U+\overrightarrow{H}\cdot\frac{1}{2c}\sum_{\alpha}(e_{\alpha}\overrightarrow{r}_{\alpha}\times\overrightarrow{V}_{\alpha}).\end{aligned}$$

现在假定 K' 系在空间固定不动，而 K 系在 K' 系中以角速度 $\overrightarrow{\varOmega}$ 转动, 则在空间固定坐标系中的速度与转动坐标系中的速度有关系式

$$\overrightarrow{V'}_{\alpha}=\overrightarrow{V}_{\alpha}+\overrightarrow{\varOmega}\times\overrightarrow{r}_{\alpha}.$$

带电粒子系统的拉格朗日量可用转动场中的量表示为

$$\begin{aligned}L=&\sum_{\alpha}\frac{m_{\alpha}}{2}\overrightarrow{V'}_{\alpha}^2-U=\sum_{\alpha}\frac{m_{\alpha}}{2}(\overrightarrow{V}_{\alpha}+\overrightarrow{\varOmega}\times\overrightarrow{r}_{\alpha})^2-U(\overrightarrow{r})\\=&\sum_{\alpha}\frac{m_{\alpha}}{2}\overrightarrow{V}_{\alpha}^2-U+\overrightarrow{\varOmega}\cdot\sum_{\alpha}m_{\alpha}\overrightarrow{r}_{\alpha}\times\overrightarrow{V}_{\alpha},\end{aligned}$$

当 $\varOmega$ 是小量时, 则在转动场中拉格朗日量为

$$L\approx\sum_{\alpha}\frac{m_{\alpha}}{2}\overrightarrow{V}_{\alpha}^2-U+\overrightarrow{\varOmega}\cdot\sum_{\alpha}m_{\alpha}\overrightarrow{r}_{\alpha}\times\overrightarrow{V}_{\alpha}.$$

若系统中带电粒子的荷质比相同, 并令 $\overrightarrow{\varOmega}=\dfrac{e}{2mc}\overrightarrow{H}$, 则可得

$$L=L_1.$$

即带电粒子系统在弱恒定外磁场中的运动与此系统在以角速度

$$\overrightarrow{\varOmega}=\frac{e}{2mc}\overrightarrow{H}$$

做均匀转动的坐标系中的运动等价, 这就是拉莫定理, Ω 称拉莫频率.

此问题也可用另一种方式讨论.

因为

$$\overline{\overrightarrow{F}} = \overline{\frac{1}{c}\sum_a e_a \overrightarrow{V}_a \times \overrightarrow{H}} = \overline{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{c}\sum_a e_a \overrightarrow{r}_a \times \overrightarrow{H}} = 0,$$

所以带电粒子系统在外加恒定磁场中所受洛伦兹力的时间平均值为零.

带电粒子系统在外加恒定磁场中所受的总力矩的时间平均值为

$$\overline{\overrightarrow{K}} = \overline{\sum_a \overrightarrow{r}_a \times \frac{1}{c}(e_a \overrightarrow{V}_a \times \overrightarrow{H})} = \overline{\frac{1}{c}\sum_a \{e_a \overrightarrow{V}_a(\overrightarrow{r}_a \cdot \overrightarrow{H}) - e_a \overrightarrow{H}(\overrightarrow{r}_a \cdot \overrightarrow{V}_a)\}}.$$

因为

$$\overline{\sum_a e_a \overrightarrow{H}(\overrightarrow{r}_a \cdot \overrightarrow{V}_a)} = \frac{1}{2}\overline{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_a e_a \overrightarrow{H}(\overrightarrow{r}_a \cdot \overrightarrow{r}_a)} = 0,$$

有

$$\begin{aligned}
\overline{\overrightarrow{K}} &= \overline{\frac{1}{c}\sum_a e_a \overrightarrow{V}_a(\overrightarrow{r}_a \cdot \overrightarrow{H})} \\
&= \frac{1}{2c}\overline{\sum_a e_a \overrightarrow{V}_a(\overrightarrow{r}_a \cdot \overrightarrow{H})} + \frac{1}{2c}\overline{\sum_a e_a \overrightarrow{V}_a(\overrightarrow{r}_a \cdot \overrightarrow{H})} \\
&= \frac{1}{2c}\overline{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_a e_a \overrightarrow{r}_a(\overrightarrow{r}_a \cdot \overrightarrow{H})} - \frac{1}{2c}\overline{\sum_a e_a \overrightarrow{r}_a(\overrightarrow{V}_a \cdot \overrightarrow{H})} + \frac{1}{2c}\overline{\sum_a e_a \overrightarrow{V}_a(\overrightarrow{r}_a \cdot \overrightarrow{H})} \\
&= \frac{1}{2c}\overline{\sum_a e_a(\overrightarrow{r}_a \times \overrightarrow{V}_a) \times \overrightarrow{H})} \\
&= \overrightarrow{m} \times \overrightarrow{H}.
\end{aligned}$$

此表达式与外电场作用在带电粒子体系上的力矩 $\overrightarrow{K} = \overrightarrow{d} \times \overrightarrow{E}$ 相类似.

因为粒子系统总角动量 $\overrightarrow{M}$ 的时间变化率等于此带电粒子系统在外磁场中所受的总力矩 $\overline{\overrightarrow{K}} = \overrightarrow{m} \times \overrightarrow{H}$, 可得方程

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{m} \times \overrightarrow{H}.$$

其中假定 $\overrightarrow{M}$ 随时间变化足够慢, 即满足条件 $\Omega \ll \dfrac{1}{T} \ll \dfrac{1}{\tau}$, T 是时间平均间隔, τ 是带电粒子内部运动周期.

对荷质比相同的带电粒子系统有 $\overrightarrow{m} = \dfrac{e}{2mc}\overrightarrow{M}$, 此式给出轨道角动量与磁矩的关系 (这里指出，电子的磁矩与自旋的关系为 $\overrightarrow{m} = \dfrac{ge}{2mc}\overrightarrow{s}$, $g = 2$, 这要借助量子力学才能给出正确解释). 由此得到

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t} = -\frac{e}{2mc}\overrightarrow{H} \times \overrightarrow{M} = -\overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{M}.$$

令 $\overrightarrow{H}$ 沿 z 轴方向，则

$$\frac{\mathrm{d}M_z}{\mathrm{d}t}=0,$$

$$\frac{\mathrm{d}M_x}{\mathrm{d}t}=\Omega M_y,$$

$$\frac{\mathrm{d}M_y}{\mathrm{d}t}=-\Omega M_x,$$

$$\frac{\mathrm{d}(M_x+\mathrm{i}M_y)}{\mathrm{d}t}=-\mathrm{i}\Omega(M_x+\mathrm{i}M_y),$$

此方程的解为

$$\begin{aligned}&M_z=\text{常数},\\&(M_x+\mathrm{i}M_y)=(M_x+\mathrm{i}M_y)_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t},\end{aligned}$$

它表示角动量 $\overrightarrow{M}$ 以角速度 $-\overrightarrow{\Omega}$ 绕外磁场转动而保持它的模和与磁场方向的夹角不变 (拉莫进动).

7.7 例　　题

例题 7.1　假定球形原子核是电荷均匀分布半径为 R 的小球, 求它的库仑能.

解 1

$$E_c=\frac{1}{8\pi}\int\overrightarrow{E}^2\mathrm{d}V\quad(\text{积分区域是整个空间}).$$

由 $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{E}=4\pi\rho$, $\rho=\dfrac{Ze}{\frac{4\pi}{3}R^3}$, 取体积 V 是半径为 r 的球体, 对方程左边运用高斯定理, 则 $|\overrightarrow{E}|=\begin{cases}\dfrac{Ze}{R^3}r, & r<R,\\ \dfrac{Ze}{r^2}, & r<R,\end{cases}$

由此可得

$$\begin{aligned}U_c&=\frac{1}{8\pi}\int\overrightarrow{E}^2\mathrm{d}V=\frac{4\pi}{8\pi}\left(\frac{Ze}{R^3}\right)^2\int_0^R r^4\mathrm{d}r+\frac{4\pi}{8\pi}(Ze)^2\int_R^\infty\frac{\mathrm{d}r}{r^2}\\&=\frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\right)\frac{(Ze)^2}{R}=\frac{3}{5}\frac{(Ze)^2}{R}=\frac{3}{5}\frac{e^2}{\hbar c}\frac{\hbar c}{r_c}\frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}}\\&=\frac{3}{5}\frac{1}{137}\frac{\hbar c}{r_c}\frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}}\approx0.7\frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}}(\mathrm{MeV})\end{aligned}$$

其中利用了 $\dfrac{e^2}{\hbar c}=\dfrac{1}{137}$ 是普适常数, $\hbar c\approx197(\mathrm{MeVfm})$.

解 2

$$U_c = \frac{1}{8\pi}\int \vec{E}^2 \mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int \rho\phi \mathrm{d}V = \frac{1}{2}\rho\int_{V_R}\phi \mathrm{d}V,$$

其中 V_R 是半径为 R 的小球. 因在球外 $\phi(r) = \dfrac{Ze}{r}$, ϕ 应满足在球表面连续的边界条件, 可得在球内

$$\phi(r) = -\int E\mathrm{d}r + c = -\int \frac{Ze}{R^3} r\mathrm{d}r + c = -\frac{Ze}{R^3}\frac{r^2}{2} + \frac{3}{2}\frac{Ze}{R}$$

(或由泊松方程 $\nabla^2\phi = -4\pi\rho$, 即由 $\left(\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)\phi = -4\pi\rho$ 也可得上式),

$$\begin{aligned} U_c &= \frac{1}{2}\rho\int_{V_R}\phi \mathrm{d}V = \frac{3}{2}\frac{Ze}{R^3}\int_0^R\left(-\frac{Ze}{R^3}\frac{r^2}{2} + \frac{3}{2}\frac{Ze}{R}\right)r^2\mathrm{d}r \\ &= \frac{3}{2}\frac{Ze}{R^3}\left(-\frac{1}{10}\frac{Ze}{R^3}R^5 + \frac{1}{2}\frac{Ze}{R}R^3\right) = \frac{3}{5}\frac{(Ze)^2}{R}. \end{aligned}$$

例题 7.2 假定原子核是均匀带电的椭球，计算它的电四极矩.

解 在本体坐标系 (椭球主轴是坐标轴)：原子核表面方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

电四极矩为

$$D_{\alpha\beta} = \int \rho(3x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha\beta})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 $\rho = \dfrac{Ze}{\dfrac{4\pi}{3}abc}$ 是原子核的电荷密度，Z 是原子核的质子数.

在原子核的本体坐标系

$$D_{xx} = \rho\int(2x^2 - y^2 - z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$D_{yy} = \rho\int(2y^2 - x^2 - z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$D_{zz} = \rho\int(2z^2 - x^2 - y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

其他分量为零.

令 $x = ax', y = by', z = cz'$, 则有

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1,$$

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = abc\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'.$$

则可得到

$$\begin{aligned} D_{xx} &= \rho abc\int(2a^2x'^2-b^2y'^2-c^2z'^2)r'^2\mathrm{d}\Omega' \\ &= \frac{4\pi}{3}abc\rho\int_0^1(2a^2-b^2-c^2)r'^4\mathrm{d}r' \\ &= \frac{Ze}{5}(2a^2-b^2-c^2), \\ D_{yy} &= \frac{Ze}{5}(2b^2-a^2-c^2), \\ D_{zz} &= \frac{Ze}{5}(2c^2-a^2-b^2). \end{aligned}$$

容易验证

$$D_{xx}+D_{yy}+D_{zz}=0.$$

即在原子核的本体系中它的电四极矩只有两个分量独立.

例题 7.3　求两个电偶极子之间的相互作用能.

解　假定两个电偶极子的偶极矩分别为 $\overrightarrow{d}_1$ 和 $\overrightarrow{d}_2$, 则 $U=-\overrightarrow{d}_2\cdot\overrightarrow{E}_1$, 这里 $\overrightarrow{E}_1$ 是第一个偶极子在第二个偶极子处产生的场.

由 $\overrightarrow{E}_1=\dfrac{3(\overrightarrow{d}_1\cdot\overrightarrow{n})\overrightarrow{n}-\overrightarrow{d}_1}{R^3}$, 可得 $U=-\dfrac{3(\overrightarrow{d}_1\cdot\overrightarrow{n})(\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{d}_2)-\overrightarrow{d}_1\cdot\overrightarrow{d}_2}{R^3}$, 这里 $R=|\overrightarrow{r}_1-\overrightarrow{r}_2|$.

这种相互作用通常称为偶极–偶极相互作用. 此相互作用是吸引的还是排斥的依赖于偶极子的相对取向. 如果两个电偶极子的方向平行，则当偶极子的取向与它们中心连线的方向由平行变为垂直时，相互作用由吸引变为排斥. 如果两个电偶极子的方向反平行，则当偶极子的取向与它们中心连线的方向由平行变为垂直时，相互作用则由排斥变为吸引. 容易看出，若两个电偶极子的取向和它们的中心分离距离固定，而对两个电偶极子的相对取向取平均，则相互作用为零.

例题 7.4　讨论电子自旋的托马斯进动.

电子有自旋 $\overrightarrow{s}$，电子的磁矩为

$$\overrightarrow{\mu}=\frac{ge}{2mc}\overrightarrow{s},\quad g=2.$$

在电子静止的参照系中，电子自旋的运动方程为

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{s}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{rest}}=\overrightarrow{\mu}\times\overrightarrow{H}_{\text{rest}},$$

其中 $\overrightarrow{H}_{\text{rest}}$ 是电子静止参照系中的磁场. 对于非相对论性的电子

$$\overrightarrow{H}_{\text{rest}}=\overrightarrow{H}_L-\frac{1}{c}\overrightarrow{V}\times\overrightarrow{E}_L,$$

$\overrightarrow{E}_L$ 和 $\overrightarrow{H}_L$ 分别是实验室系中的电场和磁场.

假定在实验室系中，在 t 时刻电子的速度为 $\overrightarrow{V}$, 在 $t+\delta t$ 时刻电子的速度为 $\overrightarrow{V}+\delta\overrightarrow{V}$, 显然电子具有加速度 $\overrightarrow{a}=\dfrac{\delta\overrightarrow{V}}{\delta t}$.

由例题 2.3 知道, 电子的瞬时速度为零的参照系仍以角速度 $\overrightarrow{\omega}_T$ 转动，且

$$\overrightarrow{\omega}_T=-\lim_{\delta t\to 0}\frac{\Delta\overrightarrow{\Omega}}{\delta t}=\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\frac{\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{V}}{c^2}.$$

对于非相对论性的电子

$$\overrightarrow{\omega}_T=\frac{\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{V}}{2c^2},$$

由

$$e\overrightarrow{E}_L=-\frac{\overrightarrow{r}}{r}\frac{\mathrm{d}V_c}{\mathrm{d}r}\quad(V_c\text{是电子在实验室系中的势能}).$$

得到

$$\overrightarrow{\omega}_T=\frac{-1}{2c^2}\frac{\overrightarrow{r}\times\overrightarrow{V}}{m}\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}V_c}{\mathrm{d}r}=\frac{-1}{2m^2c^2}\overrightarrow{\ell}\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}V_c}{\mathrm{d}r}.$$

对于任何矢量 $\overrightarrow{G}$, 有

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{G}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{nonrot}}=\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{G}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{rest}}+\overrightarrow{\omega}_T\times\overrightarrow{G},$$

对电子自旋得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{s}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{nonrot}}=\overrightarrow{s}\times\left(\frac{ge\overrightarrow{H}_{\text{rest}}}{2mc}-\overrightarrow{\omega}_T\right),$$

由此最终得到实验室系中电子与自旋有关的势能为

$$U_s=-\frac{ge}{2mc}\overrightarrow{s}\cdot\overrightarrow{H}_L+\frac{g-1}{2m^2c^2}\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}V_c}{\mathrm{d}r}\overrightarrow{s}\cdot\overrightarrow{\ell}.$$

此式能同时正确地解释原子中电子轨道的自旋–轨道劈裂和轨道电子在外加磁场中的 Zeeman 效应.

在原子核中，核子的强相互作用势 V_N 是主要的，由 $U_N=\overrightarrow{s}\cdot\overrightarrow{\omega}_T$ 可以得到原子核中核子的自旋–轨道耦合势为

$$U_N=-\frac{1}{2M^2c^2}\frac{1}{r}\overrightarrow{s}\cdot\overrightarrow{L}\frac{\mathrm{d}V_N}{\mathrm{d}r}.$$

众所周知，相对论量子力学的方程给出正确的自旋–轨道耦合势，这里借助洛伦兹变换的性质 (运动学) 得到了同样的结果.

例题 7.5　考虑一定域的电荷分布 $\rho(\vec{r})$, 它相对于 $\vec{r}_0$ 的电偶极矩为 $\vec{d}$, 在整个空间给出电场强度 $\vec{E}(\vec{r})$. 试证明

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{3(\vec{d}\cdot\vec{n})\vec{n}-\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}-\frac{4\pi}{3}\vec{d}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0),$$

其中 $\vec{n}=\dfrac{\vec{r}}{R}$.

证明　取一半径为 R 的球体，球心放在坐标原点. 下面计算电场强度 $\vec{E}(\vec{r})$ 在此球体上的积分，可得公式

$$\int_{r<R}\vec{E}(\vec{r})\mathrm{d}^3r=-\int_{r<R}\vec{\nabla}\varPhi=-\int_{r=R}R^2\varPhi(\vec{r})\vec{n}\,\mathrm{d}\varOmega,$$

其中 $\vec{n}=\dfrac{\vec{r}}{R}$.

对于已知的电荷分布 $\rho(\vec{r})$ 有

$$\varPhi(\vec{r})=\int\frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\mathrm{d}^3r'.$$

将 $\varPhi(\vec{r})$ 代入得到

$$\int_{r<R}\vec{E}(\vec{r})\mathrm{d}^3r=-R^2\int\mathrm{d}^3r'\rho(\vec{r'})\int_{r=R}\frac{\vec{n}}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\mathrm{d}\varOmega.$$

采用球坐标

$$\vec{n}=\hat{e}_x\sin\theta\cos\phi+\hat{e}_y\sin\theta\sin\phi+\hat{e}_z\cos\theta$$

并利用公式

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}=\frac{1}{r_>}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^{\ell}\mathrm{P}_\ell(\cos\gamma),$$

则可得到

$$\int_{r=R}\frac{\vec{n}}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\mathrm{d}\varOmega=\frac{r_<}{r_>^2}\int\mathrm{d}\varOmega\,\vec{n}\cos\gamma.$$

因为 $\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi')$, 完成对 $\mathrm{d}\varOmega$ 的积分, 得到

$$\int_{r<R}\vec{E}(\vec{r})\mathrm{d}^3r=-\frac{4\pi R^2}{3}\int\frac{r_<}{r_>^2}\vec{n'}\mathrm{d}^3r'\rho(\vec{r'}),$$

其中 $\vec{n'}=\dfrac{\vec{r'}}{R}$.

下面分两种情况进行讨论：

如果所有的电荷都在半径为 R 的球内，则 $r_< = r'$, $r_> = R$, 最终得到

$$\int_{r<R} \overrightarrow{E}(\overrightarrow{r})\mathrm{d}^3r = -\frac{4\pi\overrightarrow{d}}{3};$$

如果所有的电荷都在半径为 R 的球外，则 $r_< = R$, $r_> = r'$, 对这种情况有

$$\int_{r<R} \overrightarrow{E}(\overrightarrow{r})\mathrm{d}^3r = -\frac{4\pi R^2}{3}\int \mathrm{d}^3r' \frac{\overrightarrow{n'}}{r'^2}\rho(\overrightarrow{r'}).$$

由库仑定律可以得到

$$\int_{r<R} \overrightarrow{E}(\overrightarrow{r})\mathrm{d}^3r = \frac{4\pi}{3}R^3\overrightarrow{E}(0),$$

要使上面两种情况都得到满足则公式可表示为

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}) = \frac{3(\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{n})\overrightarrow{n} - \overrightarrow{d}}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_0|^3} - \frac{4\pi}{3}\overrightarrow{d}\delta(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_0), \quad \overrightarrow{n} = \frac{\overrightarrow{r}}{R}.$$

例题 7.6　考虑一定域的电流分布 $\overrightarrow{j}(\overrightarrow{r})$, 它给出磁偶极矩为 $\overrightarrow{m}$, 并在整个空间给出磁场强度 $\overrightarrow{H}(\overrightarrow{r})$. 试证明

$$\overrightarrow{H}(\overrightarrow{r}) = \frac{3(\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n})\overrightarrow{n} - \overrightarrow{m}}{|\overrightarrow{r}|^3} + \frac{8\pi}{3}\overrightarrow{m}\delta(\overrightarrow{r}),$$

其中 $\overrightarrow{n} = \dfrac{\overrightarrow{r}}{R}$.

证明　取一半径为 R 的球体，球心放在坐标原点.

$$\int_{r<R} \overrightarrow{H}(\overrightarrow{r})\mathrm{d}^3r = \int_{r<R} \overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A}\mathrm{d}^3r,$$

$$\int_{r<R} \overrightarrow{H}(\overrightarrow{r})\mathrm{d}^3r = R^2\int \overrightarrow{n}\times\overrightarrow{A}\mathrm{d}\Omega,$$

$\overrightarrow{n}$ 是半径为 R 的球面的外法线.

将公式 $\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r}) = \dfrac{1}{c}\displaystyle\int \frac{\overrightarrow{j}(\overrightarrow{r'})}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}|}\mathrm{d}^3r'$ 代入上式，则有

$$\int_{r<R} \overrightarrow{H}(\overrightarrow{r})\mathrm{d}^3r = \frac{1}{c}R^2\int \mathrm{d}^3r'\overrightarrow{j}(\overrightarrow{r'})\times\int \mathrm{d}\Omega\frac{\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}|},$$

完成对 $\mathrm{d}\Omega$ 的积分, 可以得到

$$\int_{r<R} \overrightarrow{H}(\overrightarrow{r})\mathrm{d}^3r = \frac{1}{c}\frac{4\pi}{3}\int \mathrm{d}^3r'\frac{R^2r_<}{r'r_>^2}\overrightarrow{r'}\times\overrightarrow{j}(\overrightarrow{r'}).$$

如果全部定域电流都包含在球内，则 $r_< = r'$ 和 $r_> = R$ ，由此可得

$$\int_{r<R} \overrightarrow{H}(\overrightarrow{r})\mathrm{d}^3 r = \frac{8\pi}{3}\overrightarrow{m};$$

如果全部定域电流都在球外，则可得到

$$\int_{r<R} \overrightarrow{H}(\overrightarrow{r})\mathrm{d}^3 r = \frac{4\pi R^3}{3}\overrightarrow{H}(0).$$

要使上面两种情况都得到满足则公式可表示为

$$\overrightarrow{H}(\overrightarrow{r}) = \frac{3(\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n})\overrightarrow{n}-\overrightarrow{m}}{|\overrightarrow{r}|^3} + \frac{8\pi}{3}\overrightarrow{m}\delta(\overrightarrow{r}).$$

与例题 7.5 比较，看到如果偶极矩是由正负荷给出，则第二项(δ 函数项) 的因子为 $-\dfrac{4\pi}{3}$，如果偶极矩是由封闭的流产生，则第二项的因子为 $+\dfrac{8\pi}{3}$.

第二项因子的这种差别是可以用实验检验的，实验表明粒子的磁矩是由电流给出的，而不是由正负磁荷产生的.

第 8 章　恒定电磁场 (II)

8.1　静电场的边值问题

如果我们感兴趣的问题是在被边界 S 围成的有限区域 V 中的静电场，则直接求解泊松方程 (7.4)

$$\nabla^2\phi = -4\pi\rho \tag{8.1}$$

是方便的.

若已知 V 中的电荷分布, 还知道在 V 的边界 S 上的静电势 ϕ 的值或者 ϕ 的正法线导数 $\dfrac{\partial\phi}{\partial n}$ 的值, 则区域 V 内的电场由泊松方程和此边界条件唯一确定，而与边界外的电荷分布无关，此即为静电学问题的唯一性定理. 下面证明这一定理.

对于定义在区域 V 内以及它的边界 S 上的任意函数 $\varPsi$ 和 $\varPhi$, 有恒等式

$$\overrightarrow{\nabla}\cdot(\varPsi\overrightarrow{\nabla}\varPhi) = \varPsi\nabla^2\varPhi + \overrightarrow{\nabla}\varPsi\cdot\overrightarrow{\nabla\varPhi},$$

由此可得

$$\oint_S \varPsi\overrightarrow{\nabla}\varPhi\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \int_V \varPsi\nabla^2\varPhi\mathrm{d}V + \int_V \overrightarrow{\nabla}\varPsi\cdot\overrightarrow{\nabla}\varPhi\mathrm{d}V. \tag{8.2}$$

假定 ϕ_1 和 ϕ_2 在 V 中都满足同样的泊松方程 (8.1)，在 S 上满足同样的边界条件. 令 $\varPhi = \phi_1 - \phi_2$, 则在 V 中 $\varPhi$ 满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2\varPhi = 0,$$

及边界条件

$$\varPhi|_S = 0,\quad \text{或者}\ \frac{\partial\phi}{\partial n}|_S = 0.$$

在恒等式 (8.2) 中令 $\varPsi = \varPhi$, 则可得到

$$\int_V |\overrightarrow{\nabla}\varPhi|^2\mathrm{d}V = 0,$$

这导致 $\overrightarrow{\nabla}\varPhi \equiv 0$, 所以两组解的电场强度完全相同.

如果区域 V 被界面 S_{12} 分割为区域 V_1 和 V_2, 界面 S 被相应分割为 S_1 和 S_2，在区域 V_1 和 V_2 中分别是介电常数为 ε_1 和 ε_2 的均匀电介质，则静电学的唯一性定理仍然成立.

令 $\varPhi$ 是两个解之差，在 V_1 中定义 $\varPsi=\varepsilon_1\varPhi$, 在 V_2 中定义 $\varPsi=\varepsilon_2\varPhi$, 在区域 V_1 和 V_2 内都满足 $\nabla^2\varPhi=0$.

利用恒等式 (8.2) 有

$$\int_{S_1}\varepsilon_1\varPhi\overrightarrow{\nabla}\varPhi\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S}+\int_{S_{12}}\varepsilon_1\varPhi\overrightarrow{\nabla}\varPhi\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S}=\int_{V_1}\varepsilon_1|\overrightarrow{\nabla}\varPhi|^2\mathrm{d}V,$$
$$\int_{S_2}\varepsilon_2\varPhi\overrightarrow{\nabla}\varPhi\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S}+\int_{S_{12}}\varepsilon_2\varPhi\overrightarrow{\nabla}\varPhi\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S}=\int_{V_2}\varepsilon_2|\overrightarrow{\nabla}\varPhi|^2\mathrm{d}V.$$

由边界 S_{12} 上的边界条件

$$\varepsilon_1\frac{\partial\varPhi}{\partial n}=\varepsilon_2\frac{\partial\varPhi}{\partial n},$$

得到

$$\int_{V_1}\varepsilon_1|\overrightarrow{\nabla}\varPhi|^2\mathrm{d}V+\int_{V_2}\varepsilon_2|\overrightarrow{\nabla}\varPhi|^2\mathrm{d}V=0,$$

这导致在 V 中

$$|\nabla\varPhi|\equiv0.$$

所以静电学问题的解仍然是唯一的.

如果在区域 V 中有导体存在，则还需知道导体表面 S' 上的电势或者知道它上面的总电荷，这时问题的解仍然唯一.

令在区域 V 挖去导体后所剩区域为 V'，里面是均匀电介质. 因为导体是等势面，所以

$$\oint_{S'}\varPhi\overrightarrow{\nabla}\varPhi\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S}=0;$$

则在区域 V' 和边界 $S+S'$ 上满足唯一性定理所要求的条件.

作为唯一性定理的应用, 可举例说明如何采用镜像法来求解静电场问题.

假设有一个无限大的平面导体，距离导体平面为 a 处有一点电荷 q，求在空间的电势分布.

假定导体的无限大平面为 $x=0$, 因为导体是一个等势体而它又伸展到无穷远处，所以可令导体表面上 $\varphi_{x=0}=0$，而在 $x=a$ 处有点电荷 q.

为了得到与导体表面上 $\varphi_{x=0}=0$ 相同的边界条件，可在 $x=-a$ 处放置点电荷 $-q$ 来代替导体，因为这样可得 $\varphi_{x=0}=0$ 的边界条件.

由静电场的唯一性定理, 可以求在 $x=-a$ 处有点电荷 $-q$，在 $x=a$ 处有点电荷 q 这一系统的静电势

$$\varphi(x>0,y,z)=\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{q}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}+\frac{-q}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}\right].$$

在 $x=-a$ 处的点电荷 $-q$ 称为 $x=a$ 处点电荷 q 对于导体平面的镜像.

泊松方程 (8.1) 是非齐次方程, 已经给出了它的一个满足在无限远处的边界条件为零的特解 (7.6), 但此特解不满足在有限界面 S 上的边界条件. 为了得到泊松方程满足在 S 上的边界条件的解，需要给出拉普拉斯方程的通解. 当系统具有某种空间对称性时 (如球对称性或圆柱对称性)，用分离变量法给出拉普拉斯方程的通解是方便的.

下面用球坐标和柱坐标给出拉普拉斯方程

$$\nabla^2\varPhi=0$$

的分离变量解法并列出相应的特殊函数供以后参考:

球坐标

$$\begin{aligned}z&=r\cos\theta,\\x&=r\sin\theta\cos\phi,\\y&=r\sin\theta\sin\phi,\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\nabla}^2=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r-\frac{\overrightarrow{\ell}^2}{r^2},\\&\ell_z=-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\phi},\\&\overrightarrow{\ell}^2=-\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right).\end{aligned}$$

分离变量

$$\varPhi(r,\theta,\phi)=R(r)P(\theta)Q(\phi),$$

则有

$$Q(\phi)=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}m\phi},$$

$$\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\left(\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)P(\theta)=0.$$

令 $x=\cos\theta$, 得到关联勒让德方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right]+\left[\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{(1-x)^2}\right]P=0.$$

若 $m^2=0$，则得到勒让德方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right]+\ell(\ell+1)P(x)=0,$$

它的解为勒让德多项式

$$\mathrm{P}_\ell(x)=\frac{1}{2^\ell\ell!}\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}(x^2-1)^\ell,\quad -1\leqslant x\leqslant 1.$$

容易证明，勒让德多项式满足正交化条件

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_{\ell'}(x)\mathrm{P}_\ell(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{2\ell+2}\delta_{\ell\ell'}$$

和下列递推关系式

$$(\ell+1)\mathrm{P}_{\ell+1}(x)-(2\ell+1)x\mathrm{P}_\ell(x)+\ell\mathrm{P}_{\ell-1}(x)=0,$$

$$\frac{\mathrm{dP}_{\ell+1}}{\mathrm{d}x}-x\frac{\mathrm{dP}_\ell}{\mathrm{d}x}-(\ell+1)\mathrm{P}_\ell=0,$$

$$(x^2-1)\frac{\mathrm{dP}_\ell}{\mathrm{d}x}-\ell x\mathrm{P}_\ell+\ell\mathrm{P}_{\ell-1}=0.$$

勒让德多项式 $\mathrm{P}_\ell(x)$ 在 x 的区间 $[-1,1]$ 上是完备的.

下面是几个最低阶的勒让德多项式的表达式:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}_0(x)=1,\\
&\mathrm{P}_1(x)=x,\\
&\mathrm{P}_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),\\
&\mathrm{P}_3(x)=\frac{1}{2}(5x^2-x).
\end{aligned}$$

对于 $m\geqslant 0$, 关联勒让德多项式定义为

$$\mathrm{P}_\ell^m(x)=(-1)^m(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\mathrm{P}_\ell(x),$$

有

$$\mathrm{P}_\ell^{-m}(x)=(-1)^m\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m!)}\mathrm{P}_\ell^m(x).$$

可以证明对于给定的 m, 有

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_{\ell'}^m(x)\mathrm{P}_\ell^m(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{2\ell+2}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\delta_{\ell\ell'}.$$

关联勒让德多项式满足关联勒让德方程.

定义球谐函数

$$\mathrm{Y}_{\ell m}(\theta\phi)=\sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell-m)!}}\mathrm{P}_\ell^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi},$$

则可得

$$\overrightarrow{\ell}^2\mathrm{Y}_{\ell m}(\theta\phi)=\ell(\ell+1)\mathrm{Y}_{\ell m}(\theta\phi),\quad \ell=0,1,2,\cdots,$$

$$\ell_z\mathrm{Y}_{\ell m}(\theta\phi)=m\mathrm{Y}_{\ell m}(\theta\phi),\quad m=-\ell,\cdots\ell,$$

即它是 $\overrightarrow{\ell}^2$ 和 ℓ_z 的共同本征函数.

这样定义的球谐函数满足

$$\mathrm{Y}_{\ell m}^*(\theta\phi)=(-1)^m\mathrm{Y}_{\ell-m}(\theta\phi).$$

并且有以下性质：

正交归一性

$$\int\mathrm{Y}_{\ell m}^*(\theta\phi)\mathrm{Y}_{\ell' m'}(\theta\phi)\mathrm{d}\Omega=\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'};$$

完备性

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\mathrm{Y}_{\ell m}^*(\theta'\phi')\mathrm{Y}_{\ell m}(\theta\phi)=\delta(\cos\theta-\cos\theta')\delta(\phi-\phi').$$

下面列出球谐函数的几个最低阶的表达式：

$$\mathrm{Y}_{00}=\frac{1}{\sqrt{4\pi}},$$

$$\mathrm{Y}_{10}=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta,$$

$$\mathrm{Y}_{11}=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi},$$

$$\mathrm{Y}_{20}=\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}\right),$$

$$\mathrm{Y}_{21}=-\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi},$$

$$\mathrm{Y}_{22}=\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\phi},$$

$$\mathrm{Y}_{\ell 0}=\frac{2\ell+1}{4\pi}\mathrm{P}_\ell(x).$$

加法定理

$$\mathrm{P}_\ell(\cos\gamma)=\frac{4\pi}{2\ell+1}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\mathrm{Y}_{\ell m}^*(\theta'\phi')\mathrm{Y}_{\ell m}(\theta\phi),$$

这里

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi - \phi').$$

如果 $\gamma = 0$, 则可得到

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} |\mathrm{Y}_{\ell m}(\theta\phi)|^2 = \frac{2\ell + 1}{4\pi}.$$

径向函数 $R_\ell(r)$ 满足方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 R_\ell}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}R_\ell - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}R_\ell = 0,$$

可知 $r = 0$ 是方程的正则奇点. 在此奇点附近 $R_\ell = r^s$, 由 $s(s+1) = \ell(\ell+1)$ 得 $s = \ell$ 或 $s = -(\ell+1)$, 即 $R_\ell(r)$ 有线性独立解 $r^\ell, r^{-(\ell+1)}$.

在球坐标下拉普拉斯方程的通解可表示为

$$\Phi(r,\theta,\phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} [A_\ell r^\ell + B_\ell r^{-(\ell+1)}]\mathrm{Y}_{\ell m}(\theta,\phi),$$

其中 A_ℓ 和 B_ℓ 是任意常数.

柱坐标 (ρ,ϕ,z) 下, 拉普拉斯方程有形式

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0.$$

用分离变量解法

$$\begin{aligned}
&\Phi(\rho,\phi,z) = R(\rho)Q(\phi)Z(z),\\
&\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - \kappa^2 Z = 0,\\
&\frac{\partial^2 Q}{\partial\phi^2} + \nu^2 Q = 0,\\
&\frac{\mathrm{d}^2 R(\rho)}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\left(\kappa^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right)R(\rho) = 0,
\end{aligned}$$

容易得到

$$Z(z) = \mathrm{e}^{\pm\kappa z},$$

$$Q(\phi) = \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\nu\phi}.$$

令 $x = \kappa\rho$, 则径向函数 R 满足

$$\frac{\mathrm{d}^2 R(x)}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}R(x)}{\mathrm{d}x}\left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)R(x) = 0,$$

这是标准的柱贝塞尔方程.

如果 ν 不是整数, 则 $\mathrm{J}_{\pm\nu}(x)$ 是贝塞尔方程的两个线性独立的解，称第一类贝塞尔函数.

如果 $\nu = m$ 是整数, 则 $\mathrm{J}_{-m}(x) = (-1)^m \mathrm{J}_m(x)$，它们线性相关.

定义第二类贝塞尔函数 (诺依曼函数) 为

$$\mathrm{N}_\nu(x) = \frac{\mathrm{J}_\nu(x)\cos\nu\pi - \mathrm{J}_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi},$$

可以证明，即使 $\nu \to$ 整数时，$\mathrm{J}_\nu(x)$ 和 $\mathrm{N}_\nu(x)$ 仍然线性独立.

第三类贝塞尔函数 (也称汉开尔函数)，定义为第一类贝塞尔函数和第二类贝塞尔函数的线性组合

$$\mathrm{H}_\nu^1(x) = \mathrm{J}_\nu(x) + \mathrm{i}\mathrm{N}_\nu(x),$$

$$\mathrm{H}_\nu^2(x) = \mathrm{J}_\nu(x) - \mathrm{i}\mathrm{N}_\nu(x),$$

它们彼此线性独立并分别称为第一和第二类汉开尔函数.

当 $x \ll 1$ 时，

$$\mathrm{J}_\nu(x) \to \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu,$$

$$\mathrm{N}_\nu(x) \to -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu, \quad \nu \neq 0,$$

$$\mathrm{N}_0(x) \to \frac{2}{\pi}\left[\ln\frac{x}{2} + 0.5772\cdots\right];$$

当 $x \gg 1, \nu$ 时，

$$\mathrm{J}_\nu(x) \to \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\mathrm{N}_\nu(x) \to \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

虚宗量的柱贝塞尔函数为

$$\mathrm{I}_\nu(x) = \mathrm{i}^{-\nu}\mathrm{J}_\nu(\mathrm{i}x)$$
$$\mathrm{K}_\nu(x) = \frac{\pi}{2}\mathrm{i}^{\nu+1}\mathrm{H}_\nu^1(\mathrm{i}x)$$

它们是虚宗量贝塞尔方程

$$\frac{\mathrm{d}^2R(x)}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}R(x)}{\mathrm{d}x}\left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right)R(x) = 0$$

的两个线性独立的解.

当 $x \ll 1$ 时，

$$\mathrm{I}_\nu(x) \to \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu,$$
$$\mathrm{K}_\nu(x) \to \frac{\Gamma(\nu)}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu, \quad \nu \neq 0,$$
$$\mathrm{K}_0(x) \to -\left[\ln\frac{x}{2} + 0.5772\cdots\right];$$

当 $x \gg 1, \nu$ 时，

$$\mathrm{I}_\nu(x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\mathrm{e}^x\left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right),$$

$$\mathrm{K}_\nu(x) \to \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{e}^{-x}\left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

8.2 磁标量势

通常我们借助磁矢量势讨论静磁场. 但在某些情况下引入磁标量势是方便的. 如果在空间 V 中不存在自由电流 $\vec{j}_f$，则在空间 V 内对恒定磁场的情况有

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0.$$

如果区域 V 为单连通区，可以引入磁标量势 φ_m，它满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \varphi_\mathrm{m} = 0,$$

磁场由 $\vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi_\mathrm{m}$ 给出.

若在 V 的边界 S 上磁标量势 φ_m的值或者磁标量势的法线导数 $\dfrac{\partial \varphi_\mathrm{m}}{\partial n}$ 的值已知，则静磁学的问题唯一确定. 若 V 中有两种不同的磁介质，则在导磁系数分别为 μ_1 和 μ_2 的均匀磁介质的分界面上还应有边界条件

$$\varphi_{\mathrm{m}1} = \varphi_{\mathrm{m}2},$$

$$\mu_1 \frac{\partial \varphi_{\mathrm{m}1}}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \varphi_{\mathrm{m}2}}{\partial n}.$$

在区域 V 以外的电流的影响通过 S 上的边界条件给出.

下面以静磁场的屏蔽为例来说明磁标量势的用法.

与导体可以屏蔽静电场类似，导磁系数很大的磁介质可以屏蔽磁场. 假定在一均匀的静磁场 $\vec{H}_0$ 中置放一个由导磁系数为 μ 的磁介质做成的球壳，它的内径和外径分别为 R_1 和 R_2，讨论空间的磁场分布.

令 $\phi_{\mathrm{m1}}, \phi_{\mathrm{m2}}$ 和 ϕ_{m3} 分别是球壳的空腔，球壳内和球壳外的静磁势 (假定除球壳以外的地方为真空). 采用球坐标，取坐标原点为球壳中心，磁场 $\overrightarrow{H}_0$ 的方向为极轴. 采用球坐标下的分离变量方法有

$$\phi_{\mathrm{m1}} = \sum_\ell A_\ell r^\ell \mathrm{P}_\ell(\cos\theta), r < R_1 \quad (\text{满足在原点有界}),$$
$$\phi_{\mathrm{m2}} = \sum_\ell (B_\ell r^\ell + C_\ell r^{-\ell+1})\mathrm{P}_\ell(\cos\theta), \quad R_1 \leqslant r \leqslant R_2,$$
$$\varphi_{\mathrm{m3}}(r,\theta) = -H_0 r\cos\theta + \sum_{\ell=0}^{\infty} D_\ell r^{-\ell+1}\mathrm{P}_\ell(\cos\theta), \quad r \geqslant R_2.$$

利用 $r = R_1$ 和 $r = R_2$ 处的边界条件: 磁场强度的切线分量 H_θ 连续，磁感应强度的法线分量 B_r 连续，可以得到除 A_1,B_1,C_1 和 D_1 之外所有其他系数都为零，且有

$$A_1 = \frac{(2\mu+1)(\mu-1)}{(2\mu+1)(\mu+2) - 2\dfrac{R_1^3}{R_2^3}(\mu-1)^2}(R_2^3 - R_1^3)H_0,$$
$$D_1 = \frac{9\mu}{(2\mu+1)(\mu+2) - 2\dfrac{R_1^3}{R_2^3}(\mu-1)^2}H_0.$$

在 $\mu \gg 1$ 的近似下，可以得到在空腔内的磁场强度为

$$\overrightarrow{H} \approx \frac{9}{2\mu\left[1 - \left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^3\right]}\overrightarrow{H_0} \sim \frac{R_2}{\mu\Delta R}\overrightarrow{H_0}.$$

对于很大的 μ，有 $\dfrac{R_2}{\mu\Delta R} \ll 1$, 所以空腔内的磁场强度比外加磁场小很多，此即静磁屏蔽效应. 由上式可知，磁介质壳层越厚它的屏蔽效应越强.

8.3　例　　题

例题 8.1　有一半径为 R 介电常数为 ε 的小球置于均匀电场 $\overrightarrow{E}_0$ 内, 求总的极化电偶极矩 $\overrightarrow{d}$.

解　令球内标量势为 ϕ_1 , 球外标量势为 ϕ_2(假定区域 2 是真空). 因为不存在自由电荷, 则 ϕ_1 和 ϕ_2 都满足拉普拉斯方程 $\nabla^2\phi = 0$.

边界条件要求

$$\phi_{r=0}\text{有界}, \quad \phi_{r=\infty} = -E_0 r\cos\theta,$$
$$\phi_1|_{r=R} = \phi_2|_{r=R}, \quad \varepsilon\frac{\partial\phi_1}{\partial r}\bigg|_{r=R} = \frac{\partial\phi_2}{\partial r}\bigg|_{r=R}.$$

拉普拉斯方程 $\nabla^2\phi=0$ 的分离变量解法:

采用球坐标,$\overrightarrow{E}_0$ 的方向取为极轴

$$\nabla^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\overrightarrow{\ell}^2}{r^2},$$

$$\phi(r,\theta,\varphi)=\sum_{\ell m}R_\ell(r)\mathrm{Y}_{\ell m}(\theta,\varphi),$$

径向函数 $R_\ell(r)$ 满足方程

$$\frac{\mathrm{d}^2R_\ell}{\mathrm{d}r^2}+\frac{2}{r}R_\ell-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}R_\ell=0,$$

$R_\ell(r)$ 有线性独立解 r^ℓ, $r^{-(\ell+1)}$.

由此可得

$$\phi_1=\sum_\ell A_\ell r^\ell \mathrm{P}_\ell(\cos\theta),\ r<R\quad (\text{满足在原点有界}),$$
$$\phi_2=-E_0r\cos\theta+\sum_\ell B_\ell r^{-(\ell+1)}\mathrm{P}_\ell(\cos\theta),\ r>R\quad (\text{利用了无穷远处边界条件}).$$

由 $r=R$ 处的边界条件可得只有 A_1，B_1 不等于零, 其他系数都为零, 并可得到

$$\phi_2=-\overrightarrow{E}_0\cdot\overrightarrow{r}+\frac{(\varepsilon-1)R^3}{\varepsilon+2}\overrightarrow{E}_0\cdot\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}=-\overrightarrow{E}_0\cdot\overrightarrow{r}+\frac{\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{r}}{r^3}.$$

第二项是电偶极矩 $\overrightarrow{d}$ 产生的电场，所以小球的总的极化电偶极矩为

$$\overrightarrow{d}=\frac{(\varepsilon-1)R^3}{\varepsilon+2}\overrightarrow{E}_0.$$

例题 8.2　半径为 R 金属小球置于均匀电场 $\overrightarrow{E}_0$ 内, 求总的极化电偶极矩 $\overrightarrow{d}$.

解　在金属球内, 可假定 $\phi=0$ $(r\leqslant R)$. 在金属球外, 标量势 ϕ 满足拉普拉斯方程 $\nabla^2\phi=0$ 并且要满足边界条件 $\phi_{r=\infty}=-E_0r\cos\theta$. 所以

$$\phi=\sum_\ell B_\ell r^{-(\ell+1)}\mathrm{P}_\ell(\cos\theta)-E_0r\cos\theta.$$

利用 $r=R$ 处的边界条件 $\phi|_{r=R}=0$ 可得: 若 $\ell\neq1$, 有 $B_\ell=0$, 若 $\ell=1$, 则 $B_1=E_0R^3$. 所以

$$\phi=-E_0r\cos\theta+\frac{R^3\overrightarrow{E}_0\cdot\overrightarrow{r}}{r^3},$$

第二项是电偶极矩 $\overrightarrow{d}=R^3\overrightarrow{E}_0$ 产生的势. 此结果也可由上一个例题直接得到.

由 $\overrightarrow{d}=\dfrac{(\varepsilon-1)R^3}{\varepsilon+3}\overrightarrow{E}_0$, 对金属 $\varepsilon\to\infty$, 也可得到 $\overrightarrow{d}=R^3\overrightarrow{E}_0$.

例题 8.3 有一半径为 R 导磁系数为 μ 的小球置于均匀磁场 $\overrightarrow{H}_0$ 内, 求磁介质球的总极化磁偶极矩 $\overrightarrow{M}$.

解 因为整个空间不存在自由电流，假定球内磁标量势为 $\varphi_{\rm m1}$, 球外磁标量势为 $\varphi_{\rm m2}$，它们都满足拉普拉斯方程 $\nabla^2\varphi_{\rm m}=0$, 边界条件为

$$\varphi_{\rm m1}|_{r=0}\text{有界},\quad \varphi_{\rm m2}|_{r=\infty}=-H_0r\cos\theta.$$

采用球坐标下的分离变量解法

$$\varphi_{\rm m1}(r,\theta)=\sum_{\ell=0}^{\infty}A_\ell r^\ell {\rm P}_\ell(\cos\theta),\quad \varphi_{\rm m2}(r,\theta)=-H_0r\cos\theta+\sum_{\ell=0}^{\infty}B_\ell r^{-\ell+1}{\rm P}_\ell(\cos\theta),$$

利用 $r=R$ 处的边界条件

$$\varphi_{\rm m1}|_{r=R}=\varphi_{\rm m2}|_{r=R},\quad \mu\left(\frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial r}\right)|_{r=R}=\left(\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial r}\right)|_{r=R},$$

来定展开系数，有

当 $\ell\neq 1$ 时，$A_\ell=B_\ell=0$;

当 $\ell=1$ 时, 则有

$$RA_1=-H_0R+\frac{B_1}{R^2},$$
$$\mu A_1=-H_0-\frac{2B_1}{R^3}.$$

由此可得

$$A_1=\frac{-3}{\mu+2}H_0,$$
$$B_1=\frac{\mu-1}{\mu+2}R^3H_0,$$

代入 $\varphi_{\rm m1},\varphi_{\rm m2}$ 的表达式得到

$$\varphi_{\rm m1}=-\frac{3H_0}{\mu+2}r\cos\theta,$$
$$\varphi_{\rm m2}=-H_0r\cos\theta+\frac{\mu-1}{\mu+2}R^3H_0\frac{\cos\theta}{r^2},$$

磁场强度

$$\overrightarrow{H}_1=-\overrightarrow{\nabla}\varphi_{\rm m1}=\frac{3}{\mu+2}\overrightarrow{H}_0,$$
$$\overrightarrow{H}_2=-\overrightarrow{\nabla}\varphi_{\rm m2}=\overrightarrow{H_0}-\overrightarrow{\nabla}\frac{\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{r}}{r^3},$$

其中 $\overrightarrow{m}=\dfrac{\mu-1}{\mu+2}R^3\overrightarrow{H}_0$ 是磁化球的总磁偶极矩.

对于理想导体 $\mu=0$, 可得 $\overrightarrow{m}=-\dfrac{1}{2}R^3\overrightarrow{H}_0$.

第 9 章　电　磁　波

9.1　电磁场的波动方程

从 Mexwell 方程组 (5.3) 及电磁场与电磁势的关系式

$$\overrightarrow{E}=-\overrightarrow{\nabla}\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\overrightarrow{A}}{\partial t},\quad \overrightarrow{H}=\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A}$$

出发, 有

$$\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{H}=\overrightarrow{\nabla}\times(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A})=\overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{A})-\overrightarrow{\nabla}^2\overrightarrow{A},\quad \frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}=-\frac{\partial\overrightarrow{\nabla}\phi}{\partial t}-\frac{1}{c}\frac{\partial^2\overrightarrow{A}}{\partial t^2}.$$

由此可得

$$\overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{A})-\overrightarrow{\nabla}^2\overrightarrow{A}=-\overrightarrow{\nabla}\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{A}}{\partial t^2}+\frac{4\pi}{c}\overrightarrow{j},$$

或者

$$\overrightarrow{\nabla}^2\overrightarrow{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{A}}{\partial t^2}=\overrightarrow{\nabla}\left(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)-\frac{4\pi}{c}\overrightarrow{j}.$$

如果要求电磁势满足洛伦兹条件

$$\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0 \tag{9.1}$$

(满足洛伦兹条件的规范称洛伦兹规范), 则对矢量场 $\overrightarrow{A}$ 有方程

$$\overrightarrow{\nabla}^2\overrightarrow{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{c}\overrightarrow{j}. \tag{9.2}$$

由关系式

$$\overrightarrow{\nabla}\cdot\left(-\overrightarrow{\nabla}\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\overrightarrow{A}}{\partial t}\right)=-\overrightarrow{\nabla}^2\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{A})=4\pi\rho$$

及洛伦兹条件 (9.1), 对标量势 ϕ 得到

$$\overrightarrow{\nabla}^2\phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=-4\pi\rho. \tag{9.3}$$

如果取库仑规范 (也称辐射规范)

$$\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{A}=0,$$

则有

$$\overrightarrow{\nabla}^2\phi = -4\pi\rho,$$

以及

$$\overrightarrow{\nabla}^2\overrightarrow{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{A}}{\partial t^2} = \overrightarrow{\nabla}\left(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) - \frac{4\pi}{c}\overrightarrow{j} = \overrightarrow{\nabla}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) - \frac{4\pi}{c}\overrightarrow{j}. \tag{9.4}$$

一般情况下流 $\overrightarrow{j}$ 可分解为纵向流和横向流，即

$$\overrightarrow{j} = \overrightarrow{j}_\ell + \overrightarrow{j}_t,$$

其中 $\overrightarrow{j}_\ell$ 是纵向流 ($\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{j}_\ell = 0$), $\overrightarrow{j}_t$ 是横向流 ($\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{j}_t = 0$).

因为 $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{A} = 0$, 所以方程 (9.4) 右边的量也必须是横向的.

由于 $\overrightarrow{\nabla}\times\left(\overrightarrow{\nabla}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\right) = 0$, 此项必须与 $\overrightarrow{j}_\ell$ 项相消. 所以有

$$\overrightarrow{\nabla}^2\overrightarrow{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\overrightarrow{j}_t. \tag{9.5}$$

对于任意给定的流 $\overrightarrow{j}$，可以给出 $\overrightarrow{j}_\ell$ 和 $\overrightarrow{j}_t$ 的表达式.

令

$$F(\overrightarrow{r}) = \int\frac{\overrightarrow{\nabla}_{r'}\cdot\overrightarrow{j}(\overrightarrow{r'})}{|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r'}|}\mathrm{d}\overrightarrow{r'}, \quad \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}) = \int\frac{\overrightarrow{j}(\overrightarrow{r'})}{|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r'}|}\mathrm{d}\overrightarrow{r'},$$

则容易证明 $\overrightarrow{j}_\ell, \overrightarrow{j}_t$ 形式上可以表示为

$$\overrightarrow{j_\ell}(\overrightarrow{r}) = -\frac{1}{4\pi}\overrightarrow{\nabla}_r F(\overrightarrow{r}),$$

$$\overrightarrow{j_t}(\overrightarrow{r}) = \frac{1}{4\pi}\overrightarrow{\nabla}_r\times\overrightarrow{\nabla}_r\times\overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}).$$

证明如下:

利用公式

$$\overrightarrow{\nabla}_r^2\left(\frac{1}{|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r'}|}\right) = -4\pi\delta(\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r'})$$

可得

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}_r\cdot\vec{j_\ell}(\vec{r}) =& -\frac{1}{4\pi}\int\vec{\nabla}_r^2\left(\frac{1}{|\ \vec{r}-\vec{r'}\ |}\right)\vec{\nabla}_{r'}\cdot\vec{j}(\vec{r'})\mathrm{d}\vec{r'}\\
=& -\frac{1}{4\pi}\int-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r'})\vec{\nabla}_{r'}\cdot\vec{j}(\vec{r'})\mathrm{d}\vec{r'}\\
=& \vec{\nabla}_r\cdot\vec{j}(\vec{r}),\\
\vec{\nabla}_r\times\vec{j_\ell}(\vec{r}) =& -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}_r\times(\vec{\nabla}_r\cdot F(\vec{r}))=0.\\
\vec{\nabla}_r\cdot\vec{j_t}(\vec{r}) =& \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}_r\cdot(\vec{\nabla}_r(\vec{\nabla}_r\cdot\vec{B}(\vec{r})-\vec{\nabla}_r^2\vec{B}(\vec{r})))=0,\\
\vec{\nabla}_r\times\vec{j_t}(\vec{r}) =& \vec{\nabla}_r\times\frac{1}{4\pi}(\vec{\nabla}_r(\vec{\nabla}_r\cdot\vec{B}(\vec{r})-\vec{\nabla}_r^2\vec{B}(\vec{r})))\\
=& -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}_r\times\vec{\nabla}_r^2\vec{B}(\vec{r})\\
=& -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}_r\times\int\vec{\nabla}_r^2\frac{\vec{j}(\vec{r'})}{|\ \vec{r}-\vec{r'}\ |}\mathrm{d}\vec{r'}\\
=& -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}_r\times\int-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r'})\vec{j}(\vec{r'})\mathrm{d}\vec{r'}=\vec{\nabla}_r\times\vec{j}(\vec{r}).
\end{aligned}
$$

在无源区 $\rho=0,\vec{j}=0$, 可以取标量势 $\phi=0$, 这时洛伦兹规范和库仑规范都给出条件 $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$, 矢量势 $\vec{A}$ 满足自由电磁场的波动方程

$$
\vec{\nabla}^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=0, \tag{9.6}
$$

并且有

$$
\vec{H}=\vec{\nabla}\times\vec{A},\quad \vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}.
$$

可以看出磁场 $\vec{H}$ 和电场 $\vec{E}$ 也满足自由场的波动方程.

9.2 自由平面波

首先讨论标量场的一维齐次波动方程

$$
\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}=0.
$$

令 $\xi=t+\dfrac{x}{c},\eta=t-\dfrac{x}{c}$, 则有

$$
\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial\xi\partial\eta}=0.
$$

此方程的两个线性独立的解分别为

$$f_1 = f(t + \frac{x}{c}), \quad f_2 = f\left(t - \frac{x}{c}\right).$$

取解 $f\left(t - \dfrac{x}{c}\right)$, 它表示向右传播的平面波. 矢量势 $\overrightarrow{A}$ 满足的沿 x 方向传播的自由平面波方程为

$$\frac{\partial^2 \overrightarrow{A}(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overrightarrow{A}(x,t)}{\partial t^2} = 0.$$

令

$$\overrightarrow{A} = A_x(x,t)\widehat{e}_x + A_y(x,t)\widehat{e}_y + A_z(x,t)\widehat{e}_z,$$

由条件 $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} = 0$ 可得

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A} =& A_y\left(t - \frac{x}{c}\right)\widehat{e}_y + A_z\left(t - \frac{x}{c}\right)\widehat{e}_z, \\
\overrightarrow{E} =& -\frac{1}{c}\overrightarrow{A}', \\
\overrightarrow{H} =& \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla}\left(t - \frac{x}{c}\right) \times \overrightarrow{A}' \\
=& -\frac{1}{c}\overrightarrow{n} \times \overrightarrow{A}' = \overrightarrow{n} \times \overrightarrow{E},
\end{aligned}$$

其中 $\widehat{n} = \widehat{e}_x$ 是自由平面电磁波传播方向的单位矢量.

因为

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{H}^2 =& (\widehat{n} \times \overrightarrow{E})^2 = (\widehat{n} \times \overrightarrow{E}) \cdot (\widehat{n} \times \overrightarrow{E}) \\
=& \widehat{n} \cdot (\overrightarrow{E} \times (\widehat{n} \times \overrightarrow{E})) = \widehat{n} \cdot (\widehat{n}\overrightarrow{E}^2 - \overrightarrow{E}(\widehat{n} \cdot \overrightarrow{E})) = \overrightarrow{E}^2,
\end{aligned}$$

所以自由平面电磁波的能量密度为

$$w = \frac{1}{8\pi}(\overrightarrow{E}^2 + \overrightarrow{H}^2) = \frac{1}{4\pi}\overrightarrow{E}^2 = \frac{1}{4\pi}\overrightarrow{H}^2,$$

能流密度为

$$\overrightarrow{S} = \frac{c}{4\pi}\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{H} = \frac{c}{4\pi}\overrightarrow{E} \times (\widehat{n} \times \overrightarrow{E}) = cw\widehat{n}.$$

9.3　单色平面波

电磁波的一个特殊情况是电磁场是时间的简单周期函数, 此时称电磁波为单色波. 单色波对时间 t 的依赖关系为 $\cos(\omega t + \alpha)$ (或 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$), 这里 ω 称电磁波的频率.

沿 x 方向传播的单色平面波的波动方程为

$$\frac{\partial^2 \overrightarrow{A}(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\overrightarrow{A} = 0,$$

它的解有形式

$$\vec{A}=\vec{A}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-\frac{x}{c})}=\vec{A}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)},$$

其中 $k=\dfrac{\omega}{c}$.

沿任意方向 $\hat{k}$ 传播的单色平面波的形式为

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\vec{A}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)},$$

其中 $|\vec{k}|=\dfrac{\omega}{c}$,$\hat{k}$ 是 $\vec{k}$ 方向的单位矢量.

由 $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ 可得 $\vec{k}\cdot\vec{A}=0$, 它表示 $\vec{A}$(以及 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$) 在垂直于 $\vec{k}$ 的平面内.

令 $\hat{e}_3=\hat{k}$, 则

$$\vec{E}(\vec{r},t)=(E_1\hat{e}_1+E_2\hat{e}_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)},$$

所以单色平面波总是极化的. 在一般情况下，E_1,E_2 是复数. 如果

(1) E_1,E_2 的相位相同，称电磁波是线极化的;

(2) E_1,E_2 的相位不同，称电磁波是椭圆极化的.

当 E_1,E_2 的相位相差 $90°$ 时, 即

$$\vec{E}(\vec{r},t)=E_0(\hat{e}_1\pm\mathrm{i}\hat{e}_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)},$$

称电磁波是圆极化的;

因为 $(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)=k_\mu x_\mu$ 与参照系无关, 所以在洛伦兹变换下 $k_\mu=\begin{pmatrix}\vec{k}\\ \mathrm{i}\dfrac{\omega}{c}\end{pmatrix}$ 像四维矢量一样变换.

对单色平面波电磁场的能量–动量张量可表示为

$$T_{\mu\nu}=-\frac{w^2c^2}{\omega^2}k_\mu k_\nu,$$

其中 w 是单色平面波电磁场的能量密度.

下面讨论电磁波的多普勒效应 (观测到运动光源的频率改变). 假定光源固定在 K 系)K 系在 K' 系沿 1 轴以速度 V 运动. 有

$$\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\ \mathrm{i}\dfrac{\omega_0}{c}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma&0&0&i\beta\gamma\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-\mathrm{i}\beta\gamma&0&0&\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1'\\k_2'\\k_3'\\ \mathrm{i}\dfrac{\omega}{c}\end{pmatrix}.$$

令在 K' 系观测到的光信号与 1 轴的夹角为 α, 即

$$k_1' = \frac{\omega}{c}\cos\alpha, \quad k_2' = \frac{\omega}{c}\sin\alpha, \quad k_3' = 0.$$

则在 K' 系观测到的光信号的频率 ω 与 K 系中的频率 ω_0 有关系

$$\omega_0 = \omega\frac{1-\dfrac{V}{c}\cos\alpha}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}},$$

由此可得

$$\omega = \omega_0\frac{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{1-\dfrac{V}{c}\cos\alpha}.$$

如果 $\alpha = \pi$(光源在观测方向离开观测者运动), 有 $\omega = \omega_0\sqrt{\dfrac{1-\dfrac{V}{c}}{1+\dfrac{V}{c}}}$, 即谱线红移.

采用多普勒效应对星体观测的结果表明, 宇宙在膨涨，且离我们越远的星体离开我们的速度越大 (哈勃定律).

9.4 电磁场的谱分解

一般情况下电磁场是时间 t 的函数，对它可作谱分解，即将场表示为各种频率的单色波的叠加.

假定 $f(t)$ 是描述场的任意量的实函数，则展开的形式依赖于场 $f(t)$ 的性质.

若 $f(t)$ 是 t 的周期函数 (T 是周期), 则 $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ 称场的基本频率. 在这种情况下

$$f(t) = \sum f_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega_0 t},$$

由此可得

$$f_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega_0 t}\mathrm{d}t.$$

因为 $f(t)$ 是实数, 可以得到 $f_{-n}^* = f_n$，所以函数的模在一个周期内的平均为

$$\overline{f(t)^2} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f^2(t)\mathrm{d}t = \sum_{-\infty}^{\infty} f_n f_{-n} = 2\sum_{0}^{\infty}|f_n|^2.$$

若 $f(t)$ 是非周期函数，则可展开为各种连续频率的傅里叶积分

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_\omega \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi},$$

这里只假定：当 $t\to\pm\infty$ 时 $f(t)\to 0$. 利用

$$\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-t')}\mathrm{d}\omega = 2\pi\delta(t-t'),$$

可得

$$f_\omega=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t.$$

由于 $f(t)$ 是实数，有 $f^*_{-\omega}=f_\omega$. 所以

$$\begin{aligned}\int f^2(t)\mathrm{d}t &= \int f(t)\mathrm{d}t\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_\omega \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega\right)=\frac{1}{2\pi}\int f_\omega\mathrm{d}\omega\int f(t)\mathrm{d}t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_\omega f_{-\omega}\mathrm{d}\omega = 2\int_0^\infty |f_\omega|^2\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}.\end{aligned}$$

9.5 场的傅里叶展开和场的本征振动

静电场由静止电荷产生，它与时间无关，但对静电场的空间变化也可作傅里叶展开. 对场作傅里叶变换也是求解微分方程的有效方法. 下面举例说明如何用傅里叶变换求解微分方程.

放置在原点的点电荷满足泊松方程

$$\nabla^2\phi=-4\pi e\delta(\vec{r}).$$

对此方程两边作傅里叶变换

$$\phi(\vec{r})=\int \phi_{\vec{K}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{K}\cdot\vec{r}}\frac{\mathrm{d}^3K}{(2\pi)^3},$$

则由

$$\phi_{\vec{K}}=\int\phi(\vec{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{K}\cdot\vec{r}}\mathrm{d}^3r,$$

可以得到

$$\nabla^2\phi=-\int \vec{K}^2\phi_{\vec{K}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{K}\cdot\vec{r}}\frac{\mathrm{d}^3K}{(2\pi)^3},$$

所以

$$(\nabla^2\phi)_{\vec{K}}=-K^2\phi_{\vec{K}}.$$

由方程的右边有

$$(-4\pi e\delta(\overrightarrow{r}))_{\overrightarrow{K}} = \int -4\pi e\delta(\overrightarrow{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\overrightarrow{K}\cdot\overrightarrow{r}}\mathrm{d}^3r = -4\pi e.$$

所以

$$\phi_{\overrightarrow{K}} = \frac{4\pi e}{K^2}.$$

由

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla}\phi = -\int \mathrm{i}\overrightarrow{K}\phi_{\overrightarrow{K}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\overrightarrow{K}\cdot\overrightarrow{r}}\frac{\mathrm{d}^3K}{(2\pi)^3},$$

得到静电场的傅里叶分量

$$(\overrightarrow{E})_{\overrightarrow{K}} = -\mathrm{i}\frac{4\pi e\overrightarrow{K}}{K^2}.$$

傅里叶反变换给出

$$\begin{aligned}
\phi(\overrightarrow{r}) &= \int \phi_{\overrightarrow{K}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\overrightarrow{K}\cdot\overrightarrow{r}}\frac{\mathrm{d}^3K}{(2\pi)^3} \\
&= 4\pi e\int \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\overrightarrow{K}\cdot\overrightarrow{r}}}{|\overrightarrow{K}|^2}\frac{\mathrm{d}^3K}{(2\pi)^3} = \frac{4\pi e}{(2\pi)^3}\int \frac{k^2\mathrm{d}k\sin\theta\mathrm{d}\varphi}{k^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta} \\
&= \frac{e}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}k\int_{-1}^1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\chi}\mathrm{d}\chi = \frac{e}{\mathrm{i}\pi r}\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{k}\mathrm{d}k,
\end{aligned}$$

因为 $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{k}$ 在 k 复平面上除 $k=0$ 的点之外的上半平面解析, 取积分回路 C 为除去零点的实轴加由 $k=0$ 点上方凹陷的无限小半圆再加 k 复平面的上半平面无限大半圆, 因为在上半平面无限大半圆上的积分

$$\int \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{k}\mathrm{d}k = 0$$

则有

$$\oint_C \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{k}\mathrm{d}k = \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{k}\mathrm{d}k + \mathrm{i}\int_\pi^0 \mathrm{d}\varphi = 0,$$

得到

$$\phi(\overrightarrow{r}) = \frac{e}{r}.$$

下面讨论自由电磁场的本征振动.

对自由电磁场可取规范 $\phi=0, \overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{A}=0$, 这时 $\overrightarrow{A}$ 满足

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\overrightarrow{A} = 0.$$

在体积 $V=L_1L_2L_3$ 内对 $\vec{A}$ 作傅里叶展开

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\sum_{\vec{k}}\vec{A}_{\vec{k}}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}},$$

其中假定在 V 的边界上 $\vec{A}$ 满足周期性边界条件

$$k_1=\frac{2\pi n_1}{L_1},$$

$$k_2=\frac{2\pi n_2}{L_2},$$

$$k_3=\frac{2\pi n_3}{L_3}.$$

当 V 趋向无限大时有

$$\sum_{\vec{k}}=\frac{V}{(2\pi)^3}\int\mathrm{d}^3k.$$

因为 $\vec{A}(\vec{r},t)$ 是实数, 所以 $\vec{A}_{-\vec{k}}=\vec{A}^*_{\vec{k}}$.

由条件 $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ 给出 $\vec{k}\cdot\vec{A}_{\vec{k}}=0$.

所以

$$\ddot{\vec{A}}_{\vec{k}}+\omega^2_{\vec{k}}\vec{A}_{\vec{k}}=0,$$

其中 $\omega^2_{\vec{k}}=c^2|\vec{k}|^2$.

由此可得电磁场为

$$\vec{H}=\vec{\nabla}\times\vec{A}=\mathrm{i}\sum_{\vec{k}}\vec{k}\times\vec{A}_{\vec{k}}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}},\quad \vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\frac{1}{c}\sum_{\vec{k}}\dot{\vec{A}}_{\vec{k}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}},$$

电磁场的总能量为

$$\varepsilon=\frac{1}{8\pi}\int(\vec{E}^2+\vec{H}^2)\mathrm{d}V=\frac{V}{8\pi c^2}\sum_{\vec{k}}\{\dot{\vec{A}}_{\vec{k}}\cdot\dot{\vec{A}}_{\vec{k}}^{\,*}+c^2k^2\vec{A}_{\vec{k}}\cdot\vec{A}^*_{\vec{k}}\}.$$

令

$$\vec{A}_{\vec{k}}(t)=\vec{a}_{\vec{k}}+\vec{a}^*_{-\vec{k}},$$

有

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\sum_{\vec{k}}\vec{A}_{\vec{k}}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}=\sum_{\vec{k}}\{\vec{a}_{\vec{k}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}+\vec{a}^*_{\vec{k}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}\}.$$

由方程 $\ddot{\vec{A}}_{\vec{k}}+\omega_{\vec{k}}^2\vec{A}_{\vec{k}}=0$ 可得

$$\vec{a}_{\vec{k}}\sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t},\quad \vec{a}_{\vec{k}}^{*}\sim \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},$$

其中 $\omega=c|\vec{k}|$.

最终有

$$\varepsilon=\sum_{\vec{k}}\frac{Vk^2}{2\pi}\vec{a}_{\vec{k}}\vec{a}_{\vec{k}}^{*}=\sum_{\vec{k}}\varepsilon_{\vec{k}},$$

其中 $\varepsilon_{\vec{k}}=\dfrac{Vk^2}{2\pi}\vec{a}_{\vec{k}}\vec{a}_{\vec{k}}^{*}$.

电磁场的总动量

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2}\int\vec{S}\mathrm{d}V&=\int\frac{1}{4\pi c}(\vec{E}\times\vec{H})\mathrm{d}V\\&=\frac{-\mathrm{i}}{4\pi c^2}\sum_{\vec{k}}\vec{A}_{-\vec{k}}\times(\vec{k}\times\vec{A}_k)=\sum_{\vec{k}}\frac{\hat{k}}{c}\varepsilon_{\vec{k}}.\end{aligned}$$

对于给定的 $\vec{k}$, 电磁场的动量与能量的关系与单色平面波相同, 而电磁场可视为是各种 $\vec{k}$ 的单色平面波的线性叠加.

9.6 电磁波在介质中的传播

由介质中的 Mexwell 方程组和关系式

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t},\quad \vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$$

可导出矢量势 $\vec{A}$ 和标量势 ϕ 在介质中满足的方程.

首先讨论 ε, μ 是实数常数均匀各向同性介质的情况.

由 $\vec{\nabla}\times\vec{H}=\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ 可得

$$\vec{\nabla}\times\left(\frac{1}{\mu}\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)=\frac{1}{c}\frac{\partial\varepsilon\vec{E}}{\partial t}=\varepsilon\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\vec{\nabla}\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right),$$

即

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\mu\varepsilon\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)=\left(\vec{\nabla}^2-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A}.$$

假定 $\vec{A}$ 和 ϕ 满足推广的洛伦兹条件

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\mu\varepsilon\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0,$$

可以得到

$$\left(\overrightarrow{\nabla}^2-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\overrightarrow{A}=-\frac{4\pi}{c}\overrightarrow{j}_f. \tag{9.7}$$

同样办法可导出 ϕ 满足的类似方程.

在无源区可令 $\phi=0$, $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{A}=0$, 则矢量势 $\overrightarrow{A}$ 满足

$$\left(\overrightarrow{\nabla}^2-\frac{1}{V_c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\overrightarrow{A}=0,$$

其中 $V_c=\dfrac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ 是电磁波在介质中的传播速度.

对于单色波有亥姆霍兹方程

$$\left(\overrightarrow{\nabla}^2+\frac{\mu\varepsilon\omega^2}{c^2}\right)\overrightarrow{A}=0.$$

沿 $\overrightarrow{k}$ 方向传播的单色平面波解有形式

$$\overrightarrow{E}=\overrightarrow{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r}-\omega t)},$$

其中 $|\overrightarrow{k}|=\sqrt{\mu\varepsilon}\dfrac{\omega}{c}$.

如果介质是色散电介质 (但在空间仍是均匀和各向同性的, 且假定 $\mu=1$), 则有

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{H}=0,\\
&\overrightarrow{\nabla}\cdot\widehat{\varepsilon}\overrightarrow{E}=4\pi\rho,\\
&\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial(\widehat{\varepsilon}\overrightarrow{E})}{\partial t}+\frac{4\pi\overrightarrow{j}}{c},\\
&\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\overrightarrow{H}}{\partial t}
\end{aligned}$$

和

$$\overrightarrow{E}=-\overrightarrow{\nabla}\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\overrightarrow{A}}{\partial t},\quad \overrightarrow{H}=\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A}.$$

应当注意, 这里算符 $\widehat{\varepsilon}$ 是 t 的函数而与坐标无关，所以有

$$\overrightarrow{\nabla}\cdot\widehat{\varepsilon}\overrightarrow{E}=\widehat{\varepsilon}\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{E},$$

但 $\dfrac{\partial}{\partial t}(\widehat{\varepsilon}\overrightarrow{E})\neq\widehat{\varepsilon}\dfrac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}$.

可以得到

$$\vec{\nabla}^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\hat{\varepsilon}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)-\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial(\hat{\varepsilon}\phi)}{\partial t}\right)=-\frac{1}{c}4\pi\vec{j}.$$

假定满足推广的洛伦兹条件

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial(\hat{\varepsilon}\phi)}{\partial t}=0,$$

则对矢量势 $\vec{A}$ 有方程

$$\vec{\nabla}^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\hat{\varepsilon}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=-\frac{4\pi\vec{j}}{c}. \tag{9.8}$$

因 $\vec{\nabla}\cdot(\hat{\varepsilon}\vec{E})=\hat{\varepsilon}\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$，由方程 $\vec{\nabla}\cdot\hat{\varepsilon}\vec{E}=4\pi\rho$ 可得 $-\hat{\varepsilon}\vec{\nabla}^2\phi-\frac{1}{c}\hat{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=4\pi\rho$. 利用推广的洛伦兹条件 $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial(\hat{\varepsilon}\phi)}{\partial t}=0$，则对标量势 ϕ 有方程

$$\hat{\varepsilon}\vec{\nabla}^2\phi-\frac{1}{c^2}\hat{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial(\hat{\varepsilon}\phi)}{\partial t}\right)=-4\pi\rho. \tag{9.9}$$

对于无源区的单色波 (仍可取 $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0,\phi=0$) 则有

$$\left(\vec{\nabla}^2+\frac{\varepsilon(\omega)\omega^2}{c^2}\right)\vec{A}=0,$$

其中 $\varepsilon(\omega)$ 一般为复数.

假定单色平面波的解为 $\vec{A}=\vec{A}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}'\cdot\vec{r}-\omega t)}$, 则有 $(\vec{k}')^2=\frac{\varepsilon(\omega)\omega^2}{c^2}$.

令

$$\vec{k}'=\vec{k}+\mathrm{i}\vec{\tau},\quad \varepsilon(\omega)=\varepsilon'(\omega)+\mathrm{i}\varepsilon''(\omega),$$

则 $\vec{k},\vec{\tau}$ 满足

$$\vec{k}^2-\vec{\tau}^2=\frac{\varepsilon'(\omega)\omega^2}{c^2},\quad 2\vec{k}\cdot\vec{\tau}=\frac{\varepsilon''(\omega)\omega^2}{c^2}.$$

由此得到

$$\vec{A}=\vec{A}_0\mathrm{e}^{-\vec{\tau}\cdot\vec{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)},$$

即在色散介质中单色平面波是沿 $\vec{\tau}$ 方向指数衰减而沿 $\vec{k}$ 方向传播的平面波 (一般情况下,$\vec{k}$ 和 $\vec{\tau}$ 的方向不同).

当 $\vec{\tau}$ 和 $\vec{k}$ 的方向相同时, 则

$$k^2-\tau^2=\frac{\varepsilon'(\omega)\omega^2}{c^2},\quad 2k\tau=\frac{\varepsilon''(\omega)\omega^2}{c^2},$$

得到

$$\tau=\frac{\omega}{c}\left\{\frac{(\varepsilon'^2+\varepsilon''^2)^{\frac{1}{2}}-\varepsilon'}{2}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

如果此色散介质是导体, 则有

$$\varepsilon''=\frac{4\pi\sigma_c}{\omega}\gg\varepsilon',\quad \tau\approx\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{2\pi\sigma_c}{\omega}},\quad k=\frac{1}{2\tau}\frac{\varepsilon''(\omega)\omega^2}{c^2}\approx\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{2\pi\sigma_c}{\omega}}.$$

对于金属，$\sigma_c\sim 10^{18}\mathrm{s}^{-1}$，当 $\omega\sim 10^7\mathrm{Hz}$ 时，可得

$$\tau\approx 10^3\mathrm{cm}^{-1},\quad \frac{1}{\tau}\approx 10^{-3}\mathrm{cm}.$$

即电磁波在导体表面的簿层内很快衰减而不能传播到导体内部. 在此簿层内，假定

$$\overrightarrow{E}=\mathrm{i}\frac{\omega}{c}\overrightarrow{A}_0\mathrm{e}^{-\overrightarrow{\tau}\cdot\overrightarrow{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r}-\omega t)},$$

则

$$\overrightarrow{H}=\mathrm{i}(\overrightarrow{k}+\mathrm{i}\overrightarrow{\tau})\times\overrightarrow{A},$$

由此可得

$$\frac{|H|^2}{|E|^2}\approx\frac{2\pi\sigma_c}{\omega}\gg 1,$$

电磁波的传播速度

$$V_c=\frac{\omega}{k}\sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma_c}}\ll c,$$

即在导体表面的簿层内, 主要是磁场，并且电磁波传播速度很小.

9.7 一维情况下波的叠加和群速度

物理信号都不可能是单色的，一般情况下它是有限频率间隔内各种频率的波的叠加，为了表述简单这里讨论一维波的情况. 还假定色散介质是非耗散的，即 $\varepsilon(\omega)$ 是实数.

波数 k 与频率 ω 有关系式

$$k=\frac{\omega\sqrt{\varepsilon(\omega)}}{c},$$

也可以视 ω 是 k 的函数 $\omega(k)$, 且有 $\omega(-k)=\omega(k)$，因为 $\omega(-k)$ 表示向左传播的波.

物理信号可表示为

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}A(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx-\mathrm{i}\omega(k)t}\frac{\mathrm{d}k}{2\pi},\tag{9.10}$$

则可以得到

$$A(k)=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x.$$

假定 $A(k)$ 在 $k=k_0$ 时有尖锐的峰, 则可将 $\omega(k)$ 在 $\omega_0=\omega(k_0)$ 处进行泰勒展开

$$\omega(k)=\omega_0+\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}|_0(k-k_0)+\cdots,$$

代入到式 (9.10) 可得

$$u(x,t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}[k_0\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}|_0-\omega_0]t}\int_{-\infty}^{\infty}A(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}|_0 t)}\frac{\mathrm{d}k}{2\pi}.$$

令 $x'=x-t\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}|_0$, 得到

$$u(x,t)=u\left(x-t\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}|_0,0\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[k_0\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}|_0-\omega_0]t}.$$

这表明物理信号的形状没有变化，它以 $V_g=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}|_0$ 的群速度运动. 因为场的能量正比例于场的振幅的平方，所以群速度是信号能量传播的速度.

9.8　电磁波在等离子体中的传播

在等离子体中平面波方程有形式

$$\left(\overrightarrow{\nabla}^2+\frac{\varepsilon(\omega)\omega^2}{c^2}\right)\overrightarrow{A}=0,$$

其中 $\varepsilon(\omega)=1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}$，而 $\omega_p=\sqrt{\dfrac{4\pi n_0e^2}{m}}$ 是等离子体的固有振荡频率.

假定单色平面波的解为 $\overrightarrow{A}=\overrightarrow{A}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r}-\omega t)}$, 则有色散关系

$$(\overrightarrow{k})^2=\frac{\varepsilon(\omega)\omega^2}{c^2}=\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{\omega_p^2}{c^2},\tag{9.11}$$

其中 $k=\dfrac{\omega}{c\sqrt{1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$.

波的相速度和群速度分别为

$$V_p=\frac{\omega}{k}=\frac{c}{\sqrt{1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}}>c,$$

$$V_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{c^2}{V_p} < c.$$

若 $\omega > \omega_p$, 则 k 为实数，电磁波可在等离子体中传播.

若 $\omega < \omega_p$, 则 k 为纯虚数，电磁波在等离子体中很快衰减而被反射回来.

在地球的电离层中，电子的密度为 $n_0 \sim 10^4 \sim 10^6\mathrm{cm}^{-3}$, 由此可得 ω_p 为 $6\times10^6 \sim 6\times10^7\mathrm{s}^{-1}$, 地面通信的频率要低于这一频率，而地面与卫星之间的通信频率则要高于这一频率.

因为地球磁场的存在，电磁波在电离层中的传播还要受地磁场的影响. 下面讨论电磁波的传播方向与地磁场的磁力线平行时的特征.

假定磁场沿 z 方向，即 $\vec{H} = H\vec{e}_z$. 还假定平面单色电磁波也沿着 z 方向，则电场有形式

$$\vec{E} = (\vec{e}_x \pm \mathrm{i}\,\vec{e}_y)E_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z - \mathrm{i}\omega t}.$$

对于不同的圆极化介电常数不同.

由电子的运动方程 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{e}{m}\vec{E} + \vec{V}\times\vec{\omega}_B$ 可以得到

$$\varepsilon_\pm = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \mp \omega_B)},$$

而 ω_B 是电子在磁场中的回旋频率.

当 $\omega \ll \omega_B < \omega_p$ 时，ε_- 是一个很大的正值，则波可以沿磁力线方向传播且有

$$k_- \approx \frac{\omega_p}{c}\sqrt{\frac{\omega}{\omega_B}},$$

群速度

$$V_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{2c}{\omega_p}\sqrt{\omega\omega_B}.$$

由此可知，这种电磁波是高度色散的，信号的高频部分比低频部分传播的速度快，即接受收器首先接收到信号的高频部分然后才接收到低频部分，像声波中哨子的声音一样，所以这种电磁波也称为“哨声波”.

9.9 电磁波在介质分界面的反射和折射

我们讨论电磁波在绝缘介质分界平面 (介电常数为 ε_1 和 ε_2) 的反射和折射, 假定介质为非色散透明电介质 (介电常数 ε 为实数常数, $\mu = 1$).

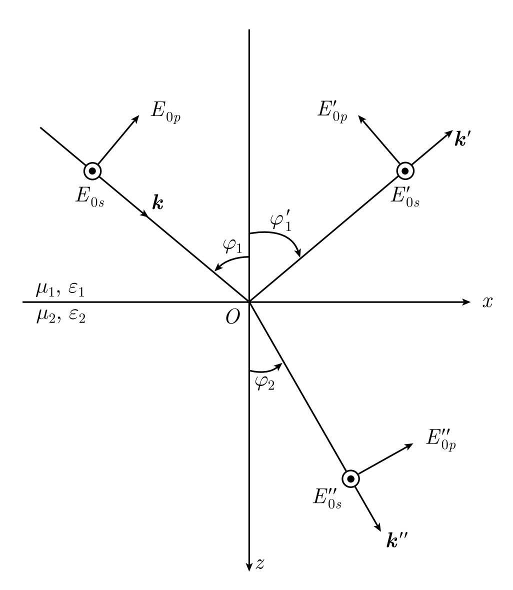


图 9.1　电磁波的反射和折射

在非色散透明介质中传播的单色波的方程为

$$\left(\overrightarrow{\nabla}^2-\frac{1}{V_c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\overrightarrow{E}=0,$$

其中 $V_c=\dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$ 是电磁波在介质中的传播速度.

单色平面波解为

$$\overrightarrow{E}=\overrightarrow{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r}-\omega t)},$$

其中 $|\overrightarrow{k}|V_c=\omega$, $|\overrightarrow{k}|=\sqrt{\varepsilon}\dfrac{\omega}{c}$.

由 $\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{E}=-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}$, 可得 $\overrightarrow{B}=\dfrac{c\overrightarrow{k}\times\overrightarrow{E}}{\omega}$.

记入射波为

$$\overrightarrow{E}_i=\overrightarrow{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r}-\omega t)},\quad \overrightarrow{B}_i=\frac{c\overrightarrow{k}\times\overrightarrow{E}_0}{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r}-\omega t)}.$$

反射波为

$$\overrightarrow{E}_r=\overrightarrow{E}'_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\overrightarrow{k}'\cdot\overrightarrow{r}-\omega' t)},\quad \overrightarrow{B}_r=\frac{c\overrightarrow{k}'\times\overrightarrow{E}'_0}{\omega'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\overrightarrow{k}'\cdot\overrightarrow{r}-\omega' t)}.$$

折射波为

$$\overrightarrow{E}_d=\overrightarrow{E}''_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\overrightarrow{k}''\cdot\overrightarrow{r}-\omega'' t)},\quad \overrightarrow{B}_d=\frac{c\overrightarrow{k}''\times\overrightarrow{E}''_0}{\omega''}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\overrightarrow{k}''\cdot\overrightarrow{r}-\omega'' t)}.$$

假定 $z=0$ 是介质分界面, 单色平面波由介质 1 传播到介质 2 (图 9-1). 在分界平面 $(z=0)$ 上的任何地方任何时刻三种波的相位相等 (几何条件), 即

$$(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)_{z=0}=(\vec{k}'\cdot\vec{r}-\omega' t)_{z=0}=(\vec{k}''\cdot\vec{r}-\omega'' t)_{z=0},$$

由此可以得到

$$\omega=\omega'=\omega'',\quad k_x=k_x'=k_x'',\quad k_y=k_y'=k_y''.$$

取 (x,z) 平面为入射平面, 则 $k_y=k_y'=k_y''=0$.

入射波和反射波在介质 $1(\varepsilon_1\ )$, 则

$$|\vec{k}|=\sqrt{\varepsilon_1}\frac{\omega}{c}=\sqrt{\varepsilon_1}\frac{\omega'}{c}=|\vec{k'}|.$$

由 $k_x=k_x'$ 得到 $\sin\varphi_1=\sin\varphi_1'$, 即入射角和反射角相等.

折射波在介质 $2(\varepsilon_2)$, 由

$$|\vec{k}|=\sqrt{\varepsilon_1}\frac{\omega}{c},\quad |\vec{k''}|=\sqrt{\varepsilon_2}\frac{\omega''}{c},\quad k_x=k_x''$$

可以得到 $\dfrac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2}=\dfrac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}}$, 即

$$\sin\varphi_2=\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\sin\varphi_1.$$

如果 $\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\sin\varphi_1>1(\varepsilon_1>\varepsilon_2)$, 则 φ_2 无实数解 (称全反射), 这时有 $\cos\varphi_2=\mathrm{i}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\varphi_1-1}$.

$\vec{E}$, $\vec{B}$ 在介质分界面上满足边界条件 (动力学条件)

$$E_{1t}=E_{2t},\quad D_{1n}=D_{2n},\quad H_{1t}=H_{2t},\quad B_{1n}=B_{2n}.$$

这些边界条件中只有下面两个是独立的,

$$(\vec{E}_0'')_t=(\vec{E}_0+\vec{E}_0')_t,\quad (\vec{k}''\times\vec{E}_0'')_t=(\vec{k}\times\vec{E}_0+\vec{k}'\times\vec{E}_0')_t.$$

在一般情况下可将入射波分解

$$\vec{E}_0=\vec{E}_{0p}+\vec{E}_{0s},$$

其中 $\vec{E}_{0p}$ 是平行于入射平面的分量, $\vec{E}_{0s}$ 是垂直于入射平面的分量.

当 $\vec{E}_0=\vec{E}_{0s}$ 时,

$$E''_{0s}=E_{0s}+E'_{0s},\quad -\frac{1}{\mu_2}k''E''_{0s}\cos\varphi_2=\frac{1}{\mu_1}(-kE_{0s}+k'E'_{0s})\cos\varphi_1,$$

得到

$$\frac{E''_{0s}}{E_{0s}}=\frac{2\sin\varphi_2\cos\varphi_1}{\sin(\varphi_1+\varphi_2)},\quad \frac{E'_{0s}}{E_{0s}}=-\frac{\sin(\varphi_1-\varphi_2)}{\sin(\varphi_1+\varphi_2)};$$

当 $\vec{E}_0=\vec{E}_{0p}$ 时,

$$(E_0-E'_0)\cos\varphi_1=E''_0\cos\varphi_2,\quad \frac{1}{\mu_2}k''E''_0=\frac{1}{\mu_1}(kE_{0s}+k'E'_{0s}),$$

得到

$$\frac{E''_{0p}}{E_{0p}}=\frac{2\sin\varphi_2\cos\varphi_1}{\sin(\varphi_1+\varphi_2)\cos(\varphi_1-\varphi_2)},\quad \frac{E'_{0p}}{E_{0p}}=\frac{\tan(\varphi_1-\varphi_2)}{\tan(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

可以看出, 即使入射波是非极化的 $(E_{0p}=E_{0s})$, 反射波也是部分极化的. 当 $\varphi_1+\varphi_2=\pi/2$ 时,$E'_{0p}=0$, 即反射波是完全线极化的.

下面讨论全反射的物理特征.

对全反射

$$\sin\varphi_2=\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\sin\varphi_1,\quad \cos\varphi_2=\mathrm{i}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\varphi_1-1},$$

则可得到

$$\begin{aligned}\vec{E}_d\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k''}\cdot\vec{x}-\mathrm{i}\omega t}&=\vec{E}_{d0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k''(x\sin\varphi_2+z\cos\varphi_2)-\mathrm{i}\omega t}\\&=\vec{E}_{d0}\mathrm{e}^{-k''z\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\varphi_1-1}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k''x\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\sin\varphi_1-\omega t)}\\&=\vec{E}_{d0}\mathrm{e}^{-k''z\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\varphi_1-1}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\left(\frac{1}{c}\sqrt{\varepsilon_1}\sin\varphi_1x-t\right)},\end{aligned}$$

所以此时介质 2 中的折射波是在 z 方向指数衰减在 x 方向以相速度 $V_c=\dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}\sin\varphi_1}$ 传播的波.

容易看出，折射波沿 z 方向的能流的平均值

$$\langle S_z\rangle=\frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}(\vec{E}_d\times\vec{B}_d^*)=\frac{c}{8\pi}|\vec{E}_{d0}|^2\mathrm{Re}(\cos\varphi_2)=0,$$

因为在全反射时, $\tan\varphi_2=-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\sin\varphi_1}{\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\varphi_1-1}}$ 是纯虚数, 则可以得到

$$\frac{E'_{0s}}{E_{0s}}=-\frac{\sin(\varphi_1-\varphi_2)}{\sin(\varphi_1+\varphi_2)}=-\frac{\tan\varphi_1-\tan\varphi_2}{\tan\varphi_1+\tan\varphi_2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_s},\quad \frac{E'_{0p}}{E_{0p}}=\frac{\tan(\varphi_1-\varphi_2)}{\tan(\varphi_1+\varphi_2)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_p},$$

即全反射时反射系数为 1, 但反射波与入射波的极化不同. 全反射的特征已被广泛应用于光纤通信.

前面已经指出, 电磁波在金属表面很快衰减而不能在金属中传播. 现在讨论电磁波在金属表面的反射. 上面关于在介质表面反射的讨论形式上仍然正确, 只需将 ε_2 换成金属的复介电常数 $\varepsilon^c = \varepsilon' + \mathrm{i}\dfrac{4\pi\sigma_c}{\omega} = \varepsilon_2' + \mathrm{i}\varepsilon_2''$，且满足 $\varepsilon_2'' \gg \varepsilon_2'$. 在这种条件下我们可得到 $|\dfrac{E_{0s}'}{E_{0s}}| \approx 1$, $|\dfrac{E_{0p}'}{E_{0p}}| \approx 1$, 即电磁波在金属表面几乎完全反射而没有能量损失. 此即波导和谐振腔的理论基础.

9.10 例　　题

例题 9.1　用傅里叶变换求解做匀速直线运动的电荷 e 产生的电磁势.

解　做匀速直线运动的电荷 e 产生的电磁势满足方程

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi = -4\pi e\delta(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{V}t),$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\overrightarrow{A} = -\frac{4\pi}{c}e\overrightarrow{V}\delta(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{V}t).$$

我们讨论第一个方程.

对标量场作傅里叶变换

$$\phi(\overrightarrow{r}, t) = \int \phi_{\overrightarrow{K}}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\overrightarrow{K}\cdot\overrightarrow{r}}\frac{\mathrm{d}^3K}{(2\pi)^3},$$

则

$$\text{左边} = (-K^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2})\phi_{\overrightarrow{K}}(t),$$

$$\text{右边} = -4\pi e\int \delta(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{V}t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\overrightarrow{K}\cdot\overrightarrow{r}}\mathrm{d}^3r = -4\pi e\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\overrightarrow{K}\cdot\overrightarrow{V})t},$$

所以有关系式

$$\phi_{\overrightarrow{K}}(t) \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\overrightarrow{K}\cdot\overrightarrow{V})t},$$

由此可得到

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi_{\overrightarrow{K}}(t) = -(\overrightarrow{K}\cdot\overrightarrow{V})^2\phi_{\overrightarrow{K}}(t).$$

所以

$$\left(K^2 - \frac{1}{c^2}(\overrightarrow{K}\cdot\overrightarrow{V})^2\right)\phi_{\overrightarrow{K}}(t) = 4\pi e\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\overrightarrow{K}\cdot\overrightarrow{V})t},$$

即

$$\phi_{\overrightarrow{K}}(t) = \frac{4\pi e \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\overrightarrow{K}\cdot\overrightarrow{V})t}}{K^2 - \frac{1}{c^2}(\overrightarrow{K}\cdot\overrightarrow{V})^2}.$$

傅里叶反变换给出

$$\phi(\overrightarrow{r},t) = \int \phi_{\overrightarrow{K}}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\overrightarrow{K}\cdot\overrightarrow{r}}\frac{\mathrm{d}^3K}{(2\pi)^3} = \frac{4\pi\mathrm{e}}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\overrightarrow{K}\cdot(\overrightarrow{r}-\overrightarrow{V}t)}}{K^2-\frac{1}{c^2}(\overrightarrow{K}\cdot\overrightarrow{V})^2}\mathrm{d}^3K.$$

令

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{V} = V\overrightarrow{e}_1,\\
&k_1' = k_1,\\
&k_2' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}V^2}}k_2,\\
&k_3' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}V^2}}k_3,
\end{aligned}$$

则

$$\mathrm{d}^3k = \left(1-\frac{1}{c^2}V^2\right)\mathrm{d}^3k'.$$

记

$$\begin{aligned}
&x_1' = x_1 - Vt,\\
&x_2' = \sqrt{1-\frac{1}{c^2}V^2}x_2,\\
&x_3' = \sqrt{1-\frac{1}{c^2}V^2}x_3,
\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{K}\cdot(\overrightarrow{r}-\overrightarrow{V}t) = k_1'x_1' + k_2'x_2' + k_3'x_3',\\
&K^2 - \frac{1}{c^2}(\overrightarrow{K}\cdot\overrightarrow{V})^2 = (1-\frac{1}{c^2}V^2)|\overrightarrow{k}'|^2.
\end{aligned}$$

所以得到

$$\begin{aligned}
\phi(\overrightarrow{r},t) &= \frac{4\pi e}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\overrightarrow{k}'\cdot\overrightarrow{r}'}}{|\overrightarrow{k}'|^2}\mathrm{d}^3k'\\
&= \frac{e}{r'} = \frac{e}{\sqrt{(x_1-Vt)^2+(1-\frac{1}{c^2}V^2)(x_2^2+x_3^2)}}.
\end{aligned}$$

用同样方法可得

$$\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r},t) = \frac{e\overrightarrow{V}/c}{\sqrt{(x_1-Vt)^2+(1-\frac{1}{c^2}V^2)(x_2^2+x_3^2)}} = \frac{\overrightarrow{V}}{c}\phi(\overrightarrow{r},t).$$

例题 9.2　假定点电荷 ze 沿 1 轴以速度 $\overrightarrow{V}$ 匀速运动，则快速运动粒子在离开运动粒子轨迹的垂直距离为 b 的一个给定点 $(0,b,0)$ 产生的场为

$$\begin{aligned}
&E_1(t)=-\frac{ze\gamma Vt}{((\gamma Vt)^2+b^2)^{\frac{3}{2}}},\\
&E_2=\frac{ze\gamma b}{((\gamma Vt)^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\quad(\text{这里令}t=0\text{时}x=0),\\
&B_3=\beta E_2,
\end{aligned}$$

其他分量为零. 求场的谱分解.

解　借助数学公式

$$K_\nu(xz)=\frac{\Gamma\left(\nu+\dfrac{1}{2}\right)(2z)^\nu}{x^\nu\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)}\int_0^\infty\frac{\cos(xt)\mathrm{d}t}{(z^2+t^2)^{\nu+\frac{1}{2}}}$$

$$\left(\mathrm{Re}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\geqslant 0,\quad x>0,\quad |\arg z|<\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\int_0^\infty\frac{z\sin(\alpha z)\mathrm{d}z}{(\beta^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\alpha K_0(\alpha\beta),$$

可以得到

$$\begin{aligned}
E_1(\omega)&=\int_{-\infty}^\infty E_1(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=-\int_{-\infty}^\infty\frac{ze\gamma Vt}{((\gamma Vt)^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\\
&=-\mathrm{i}\frac{2ze}{(\gamma V)^2}\int_0^\infty\frac{t\sin(\omega t)\mathrm{d}t}{\left(t^2+\left(\dfrac{b}{\gamma V}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}=-\mathrm{i}\frac{2ze\omega}{V^2}(1-\beta^2)K_0(\lambda b),
\end{aligned}$$

其中 $\lambda=\dfrac{\omega}{V}\sqrt{1-\beta^2}$.

$$\begin{aligned}
E_2(\omega)&=\int_{-\infty}^\infty E_2(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^\infty\frac{ze\gamma b}{((\gamma Vt)^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\\
&=\frac{2ze\gamma b}{(\gamma V)^3}\int_0^\infty\frac{\cos(\omega t)\mathrm{d}t}{(t^2+\left(\dfrac{b}{\gamma V}\right)^2)^{\frac{3}{2}}}\\
&=\frac{2ze\gamma b}{(\gamma V)^3}\frac{\omega\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)}{\left(\dfrac{2b}{\gamma V}\right)\Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right)}K_1(\lambda b),=\frac{ze}{V}\lambda K_1(\lambda b),
\end{aligned}$$

$$B_3(\omega)=\beta E_2(\omega).$$

第 10 章　运动电荷的场

10.1　延　迟　势

从 Mexwell 方程组出发并取洛伦兹规范 $\left(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{A}+\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\phi}{\partial t}=0\right)$，得到了电磁势 ϕ 和 $\overrightarrow{A}$ 满足的有源项波动方程

$$\left(\overrightarrow{\nabla}^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi(\overrightarrow{r},t)=-4\pi\rho(\overrightarrow{r},t), \tag{10.1}$$

$$\left(\overrightarrow{\nabla}^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r},t)=-\frac{4\pi}{c}\overrightarrow{j}(\overrightarrow{r},t). \tag{10.2}$$

已经知道，非齐次方程的解等于齐次方程的通解加非齐次方程的一个特解. 为了求得方程 (10.1) 的特解，令 $\rho=de(t)\delta(\overrightarrow{R})$，即将电荷 $de(t)$ 放在 $|\overrightarrow{R}|=0$ 处，则在 $|\overrightarrow{R}|\neq 0$ 的地方，有齐次方程

$$\left(\overrightarrow{\nabla}^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi(\overrightarrow{R},t)=0.$$

从物理的考虑可知，势 ϕ 是关于点 $R=0$ 球对称的，即 $\phi=\phi(R,t)$. 代入 ϕ 的齐次方程可得

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\phi(R,t)}{\partial R}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi(R,t)}{\partial t^2}=0.$$

令$\phi(R,t)=\dfrac{\chi(R,t)}{R}$，则 $\dfrac{\partial^2\chi(R,t)}{\partial R^2}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\chi(R,t)}{\partial t^2}=0$，所以 $\chi(R,t)$ 满足标量场平面波的方程式，已知其一般解为

$$\chi(R,t)=f_1\left(t-\frac{R}{c}\right)+f_2\left(t+\frac{R}{c}\right).$$

取向外传播的波 $\chi(R,t)=f_1\left(t-\dfrac{R}{c}\right)$，得到

$$\phi(R,t)=\frac{\chi\left(t-\dfrac{R}{c}\right)}{R},$$

其中 χ 是任意函数.

当 $R\to 0$ 时，有

$$|\overrightarrow{\nabla}^2\phi| \gg \frac{1}{c^2}|\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}|,$$

则有源项的波动方程近似为泊松方程

$$\overrightarrow{\nabla}^2\phi = -4\pi de(t)\delta(\overrightarrow{R}),$$

它的解为 $\dfrac{de(t)}{R}$.

这意味着 $R\to 0$ 时

$$\chi\left(t-\frac{R}{c}\right)\longrightarrow de(t),$$

所以 $\chi\left(t-\dfrac{R}{c}\right)=de\left(t-\dfrac{R}{c}\right)$，即

$$\phi(R,t)=\frac{de\left(t-\dfrac{R}{c}\right)}{R}.$$

由此我们得到非齐次方程 (10.1) 的特解为

$$\phi(\overrightarrow{r},t)=\int\frac{\rho\left(\overrightarrow{r'},t-\dfrac{R}{c}\right)}{R}\mathrm{d}\overrightarrow{r'}. \tag{10.3}$$

同样的讨论可得

$$\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r},t)=\int\frac{\overrightarrow{j}\left(\overrightarrow{r'},t-\dfrac{R}{c}\right)}{cR}\mathrm{d}\overrightarrow{r'}. \tag{10.4}$$

其中 $R=|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r'}|$.

$\phi(\overrightarrow{r},t)$ 和 $\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r},t)$ 的此种特解 (10.3) 和 (10.4) 称为延迟势，因为在 $\overrightarrow{r}$ 处 t 时刻接收到的信号是在 $\overrightarrow{r'}$ 处 $t'=t-\dfrac{R}{c}$ 时刻发出的，有时间间隔 $\Delta t=\dfrac{R}{c}$ 的延迟.

上面我们得到延迟势时借助了一些物理的论证，因为延迟势是讨论许多问题的基本出发点，下面直接验证上面得到的延迟势 (10.3) 和 (10.4) 分别满足有源项的波动方程 (10.1) 和 (10.2) 及洛伦兹条件 $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{A}+\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\phi}{\partial t}=0$.

证明如下:

因为 $\overrightarrow{R}=\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r}'$，记 $\overrightarrow{\nabla}=\overrightarrow{\nabla}_r=\dfrac{\partial}{\partial\overrightarrow{r}}$，则

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\nabla}\cdot\phi(\overrightarrow{r},t)=&\overrightarrow{\nabla}\cdot\int\frac{\rho\left(\overrightarrow{r'},t-\dfrac{R}{c}\right)}{R}\mathrm{d}\overrightarrow{r'}\\
=&\int\frac{\overrightarrow{\nabla}\rho\left(\overrightarrow{r'},t-\dfrac{R}{c}\right)}{R}\mathrm{d}\overrightarrow{r'}+\int\rho\left(\overrightarrow{r'},t-\frac{R}{c}\right)\overrightarrow{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}\overrightarrow{r'},\\
\overrightarrow{\nabla}^2\phi(\overrightarrow{r},t)=&\int\frac{\overrightarrow{\nabla}^2\rho\left(\overrightarrow{r'},t-\dfrac{R}{c}\right)}{R}\mathrm{d}\overrightarrow{r'}\\
&+2\int\overrightarrow{\nabla}\rho\left(\overrightarrow{r'},t-\frac{R}{c}\right)\cdot\overrightarrow{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}\overrightarrow{r'}+\int\rho\left(\overrightarrow{r'},t-\frac{R}{c}\right)\overrightarrow{\nabla}^2\left(\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}\overrightarrow{r'}.
\end{aligned}
$$

由

$$
\begin{aligned}
&\overrightarrow{\nabla}R=\frac{\overrightarrow{R}}{R},\\
&\overrightarrow{\nabla}\cdot\left(\frac{\overrightarrow{R}}{R}\right)=\frac{2}{R},\\
&\overrightarrow{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right)=-\frac{\overrightarrow{R}}{R^3},\quad\overrightarrow{\nabla}^2\left(\frac{1}{R}\right)=-4\pi\delta(\overrightarrow{R}),
\end{aligned}
$$

可得到

$$
\begin{aligned}
&\overrightarrow{\nabla}_r\rho\left(\overrightarrow{r'},t-\frac{R}{c}\right)=\frac{1}{c}\frac{\partial\rho}{\partial t^*}(-\overrightarrow{\nabla}R)=-\frac{1}{c}\frac{\partial\rho}{\partial t^*}\frac{\overrightarrow{R}}{R},\\
&\overrightarrow{\nabla}^2\rho\left(\overrightarrow{r'},t-\frac{R}{c}\right)=\overrightarrow{\nabla}_r\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial\rho}{\partial t^*}\frac{\overrightarrow{R}}{R}\right)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\rho}{\partial t^{*2}}-\frac{2}{R}\frac{1}{c}\frac{\partial\rho}{\partial t^*},\\
&2\overrightarrow{\nabla}_r\rho\left(\overrightarrow{r'},t-\frac{R}{c}\right)\cdot\overrightarrow{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right)=\frac{2}{R^2}\frac{1}{c}\frac{\partial\rho}{\partial t^*},
\end{aligned}
$$

所以

$$
\overrightarrow{\nabla}^2\phi\left(\overrightarrow{r},t\right)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^{*2}}\int\frac{\rho\left(\overrightarrow{r'},t-\dfrac{R}{c}\right)}{R}\mathrm{d}\overrightarrow{r'}+\int\rho\left(\overrightarrow{r'},t-\frac{R}{c}\right)(-4\pi\delta(\overrightarrow{R}))\mathrm{d}\overrightarrow{r'},
$$

最终得到

$$
\left(\overrightarrow{\nabla}^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi(\overrightarrow{r},t)=-4\pi\rho(\overrightarrow{r},t).
$$

同样的步骤可证

$$
\left(\overrightarrow{\nabla}^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r},t)=-\frac{4\pi}{c}\overrightarrow{j}(\overrightarrow{r},t).
$$

关于洛伦兹条件的证明：

因为

$$\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{A}=\int\overrightarrow{\nabla}_r\frac{\overrightarrow{j}\left(\overrightarrow{r'},t-\dfrac{|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r}'|}{c}\right)}{c|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r}'|}\mathrm{d}\overrightarrow{r'},$$

利用恒等式

$$\overrightarrow{\nabla}_r\frac{\overrightarrow{j}\left(\overrightarrow{r'},t-\dfrac{|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r}'|}{c}\right)}{c|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r}'|}=-\overrightarrow{\nabla}_{r'}\frac{\overrightarrow{j}\left(\overrightarrow{r'},t-\dfrac{|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r}'|}{c}\right)}{c|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r}'|}+\frac{\overrightarrow{\nabla}_{r'}\cdot\overrightarrow{j}\left(\overrightarrow{r'},t''|\right)}{c|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r}'|},$$

可以得到

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\\&=-\int\overrightarrow{\nabla}_{r'}\frac{\overrightarrow{j}(\overrightarrow{r'},t-|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r}'|)}{c|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r}'|}\mathrm{d}\overrightarrow{r}'+\int\frac{\overrightarrow{\nabla}_{r'}\cdot\overrightarrow{j}(\overrightarrow{r'},t')+\dfrac{\partial\rho}{\partial t'}}{c|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r}'|}\mathrm{d}\overrightarrow{r}'\\&=\int\frac{\overrightarrow{\nabla}_{r'}\cdot\overrightarrow{j}(\overrightarrow{r'},t'|)+\dfrac{\partial\rho}{\partial t'}}{c|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r}'|}\mathrm{d}\overrightarrow{r}'=0,\end{aligned}$$

其中利用了连续性方程

$$\overrightarrow{\nabla}_{r'}\cdot\overrightarrow{j}(\overrightarrow{r'},t')+\frac{\partial\rho}{\partial t'}=0.$$

10.2　李纳–维谢尔势及相应的电场和磁场

电荷为 e 的带电粒子沿轨道 $\overrightarrow{r_0}(t)$ 运动时产生的延迟势称李纳–维谢尔势. 将延迟势 (10.3) 改写为

$$\phi(\overrightarrow{r},t)=\int\frac{\rho\left(\overrightarrow{r'},t-\dfrac{R}{c}\right)}{R}\mathrm{d}\overrightarrow{r'}=\int\frac{\rho(\overrightarrow{r'},\tau)}{R}\delta\left(\tau-\left(t-\frac{R}{c}\right)\right)\mathrm{d}\overrightarrow{r'}\mathrm{d}\tau,$$

其中 $\overrightarrow{r'}$，τ 变成了独立变量.

将 $\rho(\overrightarrow{r'},\tau)=e\delta(\overrightarrow{r'}-\overrightarrow{r_0}(\tau))$ 代入，可得

$$\phi(\overrightarrow{r},t)=\int\frac{e\delta(\overrightarrow{r'}-\overrightarrow{r_0}(\tau))}{R}\delta\left(\tau-\left(t-\frac{R}{c}\right)\right)\mathrm{d}\overrightarrow{r'}\mathrm{d}\tau=\int\frac{e\delta\left(\tau-t+\dfrac{|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r_0}(\tau)|}{c}\right)}{|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r_0}(\tau)|}\mathrm{d}\tau.$$

利用 δ 函数的性质

$$\delta(F(\tau))=\sum_i\frac{\delta(\tau-t_i)}{|F'(t_i)|},$$

其中 t_i 满足 $F(t_i)=0$ (无重根)，可以得到

$$\phi(\overrightarrow{r},t)=e\int\frac{\delta(\tau-t')}{|F'(t')||(\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r_0}(\tau)|}\mathrm{d}\tau=\frac{e}{|F'(t')||(\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r_0}(t')|},$$

其中 t' 满足方程

$$t'-t+\frac{1}{c}|(\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r_0}(t')|=0.$$

因为 $F(\tau)=\tau-t+\dfrac{1}{c}|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r_0}(\tau)|$，所以

$$\frac{\mathrm{d}F(\tau)}{\mathrm{d}\tau}=1-\frac{\dfrac{1}{c}\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{r_0}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\cdot(\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r_0}(\tau))}{|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r_0}(\tau)|}=1-\frac{\overrightarrow{V}(\tau)\cdot\overrightarrow{R}(\tau)}{cR(\tau)}.$$

代入到 ϕ 的表达式得到

$$\phi(\overrightarrow{r},t)=\left.\frac{e}{R-\dfrac{\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{R}}{c}}\right|_{t'}. \tag{10.5}$$

用同样步骤可得

$$\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r},t)=\left.\frac{e\overrightarrow{V}}{c\left(R-\dfrac{\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{R}}{c}\right)}\right|_{t'}. \tag{10.6}$$

其中

$$t'=t-\frac{R(t')}{c},\quad R(t')=|(\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r_0}(t')|,\quad \overrightarrow{V}(t')=\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r_0}(t')}{\mathrm{d}t'}.$$

ϕ 和 $\overrightarrow{A}$ 的表达式 (10.5) 和 (10.6) 称李纳–维谢尔势.

我们讨论表达式的物理意义.

当 $\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{R}=0$ 时，在 $\overrightarrow{r}$ 处在 t 时刻接收到的信号是电荷 e 在 $\overrightarrow{r'}$ 处在 $t'=t-\dfrac{1}{c}R(t')$ 时刻发出并以光速传播了 $R(t')$ 距离在 t 时刻到达了 $\overrightarrow{r}$.

当 $\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{R}\neq 0$ 时，因子 $\left(1-\dfrac{\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{R}}{cR}\right)$ 表示长度的洛伦兹收缩效应.

下面给出李纳–维谢尔势的另外一种推导.

已知关系式

$$R(t')=|(\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r_0}(t')|,\quad t'=t-\frac{1}{c}R(t').$$

在随带电粒子一起运动的参照系 (K 系) 中，已经知道

$$\phi(\overrightarrow{r},t)=\frac{e}{R(t')}=\frac{e}{c(t-t')},\quad \overrightarrow{A}(\overrightarrow{r},t)=0,$$

即在 K 系中, 四维势为

$$A_\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i}\dfrac{e}{R(t')} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i}\dfrac{e}{c(t-t')} \end{pmatrix},$$

四维速度为

$$u_\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

在洛伦兹变换下它们都是四维矢量，所以有 $A_\mu \propto u_\mu$.

定义四维矢量 $R_\mu = \begin{pmatrix} \vec{r} - \vec{r_0}(t') \\ \mathrm{i}c(t-t') \end{pmatrix}$，则 $R_\mu u_\mu$ 是洛伦兹变换下的标量. 可以令 $A_\mu = -e\dfrac{u_\mu}{R_\nu u_\nu}$，因为在随粒子运动的参照系中 $R_\mu u_\mu = -c(t-t')$，可以得到 $A_\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i}\dfrac{e}{c(t-t')} \end{pmatrix}$，它正是我们在 K 系中得到的四维势.

在实验室系中,

$$-eu_\mu = -e \begin{pmatrix} \dfrac{\vec{V}(t')}{c\sqrt{1-\dfrac{V^2(t')}{c^2}}} \\ \mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2(t')}{c^2}}} \end{pmatrix} = \frac{-1}{c\sqrt{1-\dfrac{V^2(t')}{c^2}}} \begin{pmatrix} e\vec{V}(t') \\ \mathrm{i}ce \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} R_\nu u_\nu &= \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2(t')}{c^2}}} \left(\frac{1}{c}\vec{V}(t') \cdot \vec{R}(t') - c(t-t')\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2(t')}{c^2}}} \left(\frac{1}{c}\vec{V}(t') \cdot \vec{R}(t') - R(t')\right), \end{aligned}$$

由此可得到李纳–维谢尔势

$$A_\mu = -e\frac{u_\mu}{R_\nu u_\nu} = \begin{pmatrix} \dfrac{e\vec{V}(t')}{c(R(t') - \dfrac{\vec{V}(t') \cdot \vec{R}(t')}{c})} \\ \dfrac{\mathrm{i}e}{R(t') - \dfrac{\vec{V}(t') \cdot \vec{R}(t')}{c}} \end{pmatrix},$$

其中 $R(t') = |(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}(t')|$.

作为特例，当带电粒子沿 x 轴做匀速直线运动时

$$\overrightarrow{r_0}(t') = \overrightarrow{V}t' = \widehat{e_x}Vt',$$

则李纳–维谢尔势有特殊形式

$$\phi(\overrightarrow{r}, t) = \left.\frac{e}{R\left(1 - \dfrac{\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{R}}{R}\right)}\right|_{t'}, \quad \overrightarrow{A}(\overrightarrow{r}, t) = \left.\frac{e}{c\left(R - \dfrac{\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{R}}{c}\right)}\right|_{t'},$$

而 $\overrightarrow{R}(t') = \overrightarrow{r} - \widehat{e_x}Vt'$.

下面证明此表达式与第 7 章对带电粒子做匀速直线运动时给出的结果相同.

对沿 x 轴以速度 V 做匀速直线运动的电荷 e 产生的势，第 7 章已经给出

$$\begin{aligned}
\phi &= \frac{e}{R^*(t)}, \\
R^*(t) &= \sqrt{(x - Vt)^2 + (1 - \frac{V^2}{c^2})(y^2 + z^2)} \\
&= \sqrt{(x - Vt)^2 + y^2 + z^2}\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}\frac{y^2 + z^2}{(x - Vt)^2 + y^2 + z^2}} \\
&= R(t)\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}\sin^2\theta_t} \\
&= \sqrt{\overrightarrow{R}^2(t) - \frac{1}{c^2}(\overrightarrow{V}\times\overrightarrow{R}(t))^2},
\end{aligned}$$

由关系式

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{R}(t) &= \overrightarrow{r} - \widehat{e_x}Vt, \\
\overrightarrow{R}(t') &= \overrightarrow{r} - \widehat{e_x}Vt'.
\end{aligned}$$

有

$$\overrightarrow{R}(t) - \overrightarrow{R}(t') = \widehat{e_x}V(t' - t) = -\widehat{e_x}\frac{VR(t')}{c},$$

即

$$\overrightarrow{R}(t) = \overrightarrow{R}(t') - \widehat{e_x}\frac{VR(t')}{c}.$$

由此可得

$$\overrightarrow{V}\times\overrightarrow{R}(t) = \overrightarrow{V}\times\overrightarrow{R}(t').$$

所以

$$\begin{aligned}
R^*(t) &= \sqrt{\overrightarrow{R}^2(t) - \frac{1}{c^2}(\overrightarrow{V}\times\overrightarrow{R}(t))^2} \\
&= R(t')\left(1 - \frac{1}{c}V\cos\theta_{t'}\right) = R(t') - \frac{\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{R}(t')}{c},
\end{aligned}$$

即

$$\phi = \frac{e}{R^*(t)} = \frac{e}{R(t') - \dfrac{\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{R}(t')}{c}}.$$

同样步骤可得

$$\overrightarrow{A} = \frac{e\overrightarrow{V}}{cR^{\bullet}(t)} = \frac{e\overrightarrow{V}}{c(R(t') - \dfrac{\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{R}(t')}{c})}.$$

下面我们由李纳–维谢尔势导出电场 $\overrightarrow{E}$ 和磁场 $\overrightarrow{H}$ 的表达式.

因为 $t' = t - \dfrac{|(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}(t')|}{c}$，所以 t' 是独立变量 t 和 $\overrightarrow{r}$ 的函数.
由 $\dfrac{\partial t'}{\partial t} = 1 - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial R(t')}{\partial t} = 1 - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial R(t')}{\partial t'}\dfrac{\partial t'}{\partial t}$，可得到

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial R(t')}{\partial t'}}.$$

又由

$$R(t') = |(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}(t')|, \quad \frac{\partial R(t')}{\partial t'} = -\frac{\overrightarrow{V}(t') \cdot \overrightarrow{R}(t')}{R(t')},$$

得到

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{c}\dfrac{\overrightarrow{V}(t') \cdot \overrightarrow{R}(t')}{R(t')}} = \frac{R(t')}{R(t') - \dfrac{1}{c}\overrightarrow{V}(t') \cdot \overrightarrow{R}(t')}.$$

由

$$\overrightarrow{\nabla}_r \cdot t' = -\frac{1}{c}\overrightarrow{\nabla}_r \cdot R(t'), \quad R(t') = |(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}(t')|,$$

则有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\nabla}_r \cdot R(t') = \overrightarrow{\nabla}_r \cdot |(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}(t')| &= \frac{\overrightarrow{R}(t')}{R(t')} + \frac{\partial R(t')}{\partial t'}\overrightarrow{\nabla}_r \cdot t' \\ &= \frac{\overrightarrow{R}(t')}{R(t')} - \frac{\overrightarrow{V}(t') \cdot \overrightarrow{R}(t')}{R(t')}\overrightarrow{\nabla}_r \cdot t'.\end{aligned}$$

所以

$$\overrightarrow{\nabla}_r \cdot t' = -\frac{\overrightarrow{R}(t')}{cR(t')} + \frac{\overrightarrow{V}(t') \cdot \overrightarrow{R}(t')}{cR(t')}\overrightarrow{\nabla}_r \cdot t'.$$

得到

$$\overrightarrow{\nabla}_r \cdot t' = -\frac{\overrightarrow{R}(t')}{c\left(R(t') - \dfrac{1}{c}\overrightarrow{V}(t') \cdot \overrightarrow{R}(t')\right)}, \quad \text{或者 } \overrightarrow{\nabla}_r \cdot R(t') = \frac{\overrightarrow{R}(t')}{R(t') - \dfrac{1}{c}\overrightarrow{V}(t') \cdot \overrightarrow{R}(t')}.$$

由李纳–维谢尔势的表达式 (10.5) 和 (10.6) 有

$$
\begin{aligned}
&-\overrightarrow{\nabla}_r\phi(\overrightarrow{r},t)\\
=&\frac{e}{(R(t')-\frac{1}{c}\overrightarrow{V}(t')\cdot\overrightarrow{R}(t'))^2}\left(\overrightarrow{\nabla}_r\cdot R(t')-\frac{1}{c}\overrightarrow{\nabla}_r\cdot(\overrightarrow{V}(t')\cdot\overrightarrow{R}(t'))\right)\\
=&\frac{e}{\left(R(t')-\frac{1}{c}\overrightarrow{V}(t')\cdot\overrightarrow{R}(t')\right)^2}\left\{\overrightarrow{\nabla}_r\cdot R(t')-\frac{1}{c}\overrightarrow{V}(t')-\frac{1}{c}\frac{\partial(\overrightarrow{V}(t')\cdot\overrightarrow{R}(t'))}{\partial t'}\overrightarrow{\nabla}_r\cdot t'\right\}\\
=&\frac{e}{\left(R(t')-\frac{1}{c}\overrightarrow{V}(t')\cdot\overrightarrow{R}(t')\right)^3}\{\overrightarrow{R}(t')-\frac{1}{c}\overrightarrow{V}(t')[R(t')-\frac{1}{c}\overrightarrow{V}(t')\cdot\overrightarrow{R}(t')]\\
&-\frac{1}{c^2}\overrightarrow{R}(t')\overrightarrow{V}^2(t')+\frac{1}{c^2}\overrightarrow{R}(t')(\dot{\overrightarrow{V}}\cdot\overrightarrow{R}(t'))\}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r},t)}{\partial t}=-\frac{\partial\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r},t)}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{e\overrightarrow{V}(t')}{c(R(t')-\frac{1}{c}\overrightarrow{V}(t')\cdot\overrightarrow{R}(t'))}\right)\frac{\partial t'}{\partial t}\\
=&-\frac{e\left\{\dot{\overrightarrow{V}}\left[R(t')-\frac{1}{c}\overrightarrow{V}(t')\cdot\overrightarrow{R}(t')\right]-\overrightarrow{V}(t')\left[-\frac{\overrightarrow{V}(t')\cdot\overrightarrow{R}(t')}{R(t')}-\frac{1}{c}\dot{\overrightarrow{V}}\cdot\overrightarrow{R}(t')+\frac{1}{c}\overrightarrow{V}^2(t')\right]\right\}}{c\left(R(t')-\frac{1}{c}\overrightarrow{V}(t')\cdot\overrightarrow{R}(t')\right)^2}.\\
&\frac{R(t')}{R(t')-\frac{1}{c}\overrightarrow{V}(t')\cdot\overrightarrow{R}(t')}\\
=&-\frac{e}{c\left(R(t')-\frac{1}{c}\overrightarrow{V}(t')\cdot\overrightarrow{R}(t')\right)^3}\left\{\overrightarrow{V}(t')\left[\overrightarrow{V}(t')\cdot\overrightarrow{R}(t')-\frac{1}{c}R(t')\overrightarrow{V}^2(t')\right]\right.\\
&\left.+\dot{\overrightarrow{V}}\left[\left(R(t')-\frac{1}{c}\overrightarrow{V}(t')\cdot\overrightarrow{R}(t')\right)\right]R(t')+\frac{1}{c}\dot{\overrightarrow{V}}\cdot\overrightarrow{R}(t')R\overrightarrow{V}(t')\right\}.
\end{aligned}
$$

由此可得

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{E}=&-\overrightarrow{\nabla}_r\phi(\overrightarrow{r},t)-\frac{1}{c}\frac{\partial\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r},t)}{\partial t}\\
=&\frac{e}{\left(R(t')-\frac{1}{c}\overrightarrow{V}(t')\cdot\overrightarrow{R}(t')\right)^3}\left\{\left[\overrightarrow{R}(t')-\frac{1}{c}\overrightarrow{V}(t')R(t')\right]\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\right.\\
&+\frac{1}{c^2}\overrightarrow{R}(t')(\dot{\overrightarrow{V}}\cdot\overrightarrow{R}(t'))-\frac{1}{c^2}\dot{\overrightarrow{V}}\left[\left(R(t')-\frac{1}{c}\overrightarrow{V}(t')\cdot\overrightarrow{R}(t')\right)\right]R(t')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left.-\frac{1}{c^3}\dot{\vec{V}}\cdot\vec{R}(t')R\vec{V}(t')\right\}\\
=&\frac{e}{\left(R(t')-\dfrac{1}{c}\vec{V}(t')\cdot\vec{R}(t')\right)^3}\left\{\left[\vec{R}(t')-\frac{1}{c}\vec{V}(t')R(t')\right]\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\right.\\
&\left.+\frac{1}{c^2}\vec{R}(t')\times\left[\left(\vec{R}(t')-\frac{1}{c}\vec{V}(t')R\right)\times\dot{\vec{V}}\right]\right\}\\
=&\vec{E}_1+\vec{E}_2,
\end{aligned}
$$

这里只与粒子速度有关而与加速度无关的项为 $\vec{E}_1$，与粒子的加速度成正比的项为 $\vec{E}_2$.

当 $|\vec{r}|\to\infty, R(t')=|(\vec{r}-\vec{r_0}(t')|\to r$ 时，

$$
\begin{aligned}
\vec{E}_1&=\frac{e\left(1-\dfrac{\vec{V}^2(t')}{c^2}\right)}{(R(t')-\dfrac{1}{c}\vec{V}(t')\cdot\vec{R}(t'))^3}\left(\vec{R}(t')-\frac{1}{c}\vec{V}(t')R(t')\right)\sim\frac{1}{r^2}\to 0,\\
\vec{E}_2&=\frac{e}{c^2\left(R(t')-\dfrac{1}{c}\vec{V}(t')\cdot\vec{R}(t')\right)^3}\vec{R}(t')\\
&\quad\times\left\{\left(\vec{R}(t')-\frac{1}{c}\vec{V}(t')R(t')\right)\times\dot{\vec{V}}(t')\right\}\sim\frac{1}{r}\to 0.
\end{aligned}
$$

即当 $|\vec{r}|\to\infty$ 时，只有 $\vec{E}_2$ 项存在且与带电粒子的加速度成正比.

由 $\vec{H}=\nabla_r\times\vec{A}(\vec{r},t)$ 及 $\vec{A}(\vec{r},t)=\dfrac{1}{c}\phi(t')\vec{V}(t')$ 出发，可得

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}_r\times\vec{A}(\vec{r},t)&=\frac{1}{c}\vec{\nabla}_r\times(\phi(t')\vec{V}(t'))=\phi(t')\vec{\nabla}_r\times\vec{V}(t')+\vec{\nabla}_r\cdot\phi(t')\times\vec{V}(t')\\
&=\phi(t')\vec{\nabla}_r\cdot t'\times\dot{\vec{V}}(t')+\vec{\nabla}_r\cdot\phi(t')\times\vec{V}(t')=\vec{H}_1+\vec{H}_2.
\end{aligned}
$$

这里只与粒子速度有关与加速度无关的项为 $\vec{H}_1$，与加速度成正比的项为 $\vec{H}_2$，且有关系式

$$
\vec{H}_1=\frac{\vec{R}(t')}{R(t')}\times\vec{E}_1,\quad \vec{H}_2=\frac{\vec{R}(t')}{R(t')}\times\vec{E}_2.
$$

10.3　延迟势和李纳–维谢尔势的谱分解

先讨论延迟势 (10.3) 和 (10.4) 的谱分解.

由 $\phi(\vec{r},t)=\int\phi_\omega \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}$ 可得

$$\begin{aligned}\phi_\omega(\vec{r})&=\int\phi(\vec{r},t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\int\frac{\rho\left(\vec{r'},t-\dfrac{R}{c}\right)}{R}\mathrm{d}\vec{r'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\\&=\int\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{c}R}}{R}\mathrm{d}\vec{r'}\int\rho\left(\vec{r'},t-\frac{R}{c}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\left(t-\frac{R}{c}\right)}\mathrm{d}\left(t-\frac{R}{c}\right)\\&=\int\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\rho_\omega(\vec{r'})\mathrm{d}\vec{r'},\end{aligned}$$

其中

$$k=\frac{\omega}{c},\quad \rho_\omega(\vec{r'})=\int\rho(\vec{r'},t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t.$$

由此可得

$$\phi_\omega(\vec{r})=\int\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+kR)}}{R}\rho(\vec{r'},t)\mathrm{d}\vec{r'}\mathrm{d}t. \tag{10.7}$$

同样步骤有

$$\vec{A}_\omega(\vec{r})=\int\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+kR)}}{cR}\vec{j}(\vec{r'},t)\mathrm{d}\vec{r'}\mathrm{d}t. \tag{10.8}$$

当电荷为 e 的带电粒子沿轨道 $\vec{r_0}(t)$ 运动时 (李纳–维谢尔势) 有

$$\begin{aligned}&\rho(\vec{r'},t)=e\delta(\vec{r'}-\vec{r_0}(t)),\\&\vec{j}(\vec{r'},t)=e\delta(\vec{r'}-\vec{r_0}(t))\vec{V}(t),\\&\vec{V}(t)=\frac{\mathrm{d}\vec{r_0}(t)}{\mathrm{d}t},\end{aligned}$$

代入可得到

$$\phi_\omega(\vec{r})=\int\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\left(t+\frac{R}{c}\right)}}{R}\mathrm{e}\delta(\vec{r'}-\vec{r_0}(t))\mathrm{d}\vec{r'}\mathrm{d}t=e\int\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\left(t+\frac{R(t)}{c}\right)}}{R(t)}\mathrm{d}t, \tag{10.9}$$

$$\vec{A}_\omega(\vec{r'})=\int\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\left(t+\frac{R}{c}\right)}}{cR}e\delta(\vec{r'}-\vec{r_0}(t))\vec{V}(t)\mathrm{d}\vec{r'}\mathrm{d}t=\frac{e}{c}\int\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\left(t+\frac{R(t)}{c}\right)}}{R(t)}\vec{V}(t)\mathrm{d}t, \tag{10.10}$$

其中 $R(t)=|\vec{r}-\vec{r_0}(t)|$.

当电荷 e 沿封闭轨道 $\overrightarrow{r_0}(t)$ 做周期运动时, 有

$$\overrightarrow{A}_n = \frac{e}{c}\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega_0\left(t+\frac{R(t)}{c}\right)}}{R(t)}\overrightarrow{V}(t)\mathrm{d}t,$$

其中 $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$.

10.4 带电粒子系统的经典力学描述

在经典力学中, 带电粒子系统的拉格朗日量为

$$L = \sum_{\alpha}\frac{m_\alpha}{2}V_\alpha^2 - \frac{1}{2}\sum_{\alpha\neq\beta}\frac{e_\alpha e_\beta}{R_{\beta\alpha}},$$

这时带电粒子 α 和 β 之间的库仑相互作用是瞬时的.

在电动力学中，带电粒子 α 和 β 之间的相互作用是以有限速度 (光速) 传播的.

$$\begin{aligned}
&L = \sum_{\alpha}L_\alpha, \\
&L_\alpha = -m_\alpha c^2\sqrt{1-\frac{V_\alpha^2}{c^2}} + \frac{e_\alpha}{c}\overrightarrow{V}_\alpha\cdot\overrightarrow{A} - e_\alpha\phi,
\end{aligned}$$

其中 $\overrightarrow{A}$ 和 ϕ 是其他带电粒子在粒子 α 上产生的延迟势.

如要采用瞬时相互作用，则对粒子系统的拉格朗日量 L 中的延迟势必须取近似形式,

$$\begin{aligned}
\rho\left(\overrightarrow{r'}, t-\frac{R}{c}\right) &\approx \rho(\overrightarrow{r'}, t) - \frac{1}{c}R\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_t + \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}R^2\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}\right)_t, \\
\overrightarrow{j}\left(\overrightarrow{r'}, t-\frac{R}{c}\right) &\approx \overrightarrow{j}(\overrightarrow{r'}, t),
\end{aligned}$$

则可得到

$$\begin{aligned}
\phi(\overrightarrow{r}, t) &= \int\frac{\rho\left(\overrightarrow{r'}, t-\frac{R}{c}\right)}{R}\mathrm{d}\overrightarrow{r'} \\
&\approx \int\frac{\rho(\overrightarrow{r'}, t)}{R}\mathrm{d}\overrightarrow{r'} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int\rho(\overrightarrow{r'}, t)\mathrm{d}\overrightarrow{r'} + \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int R\rho(\overrightarrow{r'}, t)\mathrm{d}\overrightarrow{r'} \\
&\approx \int\frac{\rho(\overrightarrow{r'}, t)}{R}\mathrm{d}\overrightarrow{r'} + \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int R\rho(\overrightarrow{r'}, t)\mathrm{d}\overrightarrow{r'},
\end{aligned}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\int\frac{\vec{j}\left(\vec{r'},t-\dfrac{R}{c}\right)}{cR}\mathrm{d}\vec{r'}\approx\int\frac{\vec{j}(\vec{r'},t)}{cR}\mathrm{d}\vec{r'}.$$

对点电荷

$$\rho(\vec{r'},t)=e\delta(\vec{r'}-\vec{r_0}(t)),$$

可得

$$\phi(\vec{r},t)=\frac{e}{R(t)}+\frac{e}{2}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}R(t),$$

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{e\vec{V}(t)}{cR(t)},$$

其中

$$R(t)=|\vec{r}-\vec{r}_0(t)|,\quad \vec{V}(t)=\frac{\mathrm{d}\vec{r}_0(t)}{\mathrm{d}t}.$$

作规范变换

$$\phi'(\vec{r},t)=\phi(\vec{r},t)-\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t},$$

$$\vec{A'}(\vec{r},t)=\vec{A}(\vec{r},t)+\vec{\nabla}f.$$

取

$$f(\vec{r},t)=\frac{e}{2}\frac{1}{c}\frac{\partial R(t)}{\partial t},$$

则得到

$$\phi'(\vec{r},t)=\frac{e}{R(t)},$$

$$\vec{A'}(\vec{r},t)=\frac{e\vec{V}(t)}{cR(t)}+\frac{e}{2c}\vec{\nabla}\frac{\partial R(t)}{\partial t}.$$

因为

$$\vec{\nabla}\frac{\partial R(t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}R(t)=\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}|\vec{r}-\vec{r}_0(t)|=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\vec{r}-\vec{r}_0(t)}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t)|}=\dot{\vec{n}},\quad R^2=\vec{R}\cdot\vec{R},$$

所以

$$R\dot{R}=-\vec{R}\cdot\vec{V},$$

由此可得

$$\dot{\vec{n}}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{R}}{R}\right)=\frac{\dot{\vec{R}}}{R}-\vec{R}\frac{\dot{R}}{R^2}=\frac{-\vec{V}}{R}-\frac{\vec{R}}{R^2}(-\vec{n}\cdot\vec{V})=\frac{\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{V})-\vec{V}}{R},$$

所以

$$\overrightarrow{A'}(\overrightarrow{r},t)=\frac{e\overrightarrow{V}(t)}{cR(t)}+\frac{e}{2}\frac{\overrightarrow{n}(\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{V})-\overrightarrow{V}}{cR}=\frac{e(\overrightarrow{n}(\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{V})+\overrightarrow{V})}{2cR(t)}.$$

由此可得 β 粒子在 α 粒子上产生的电磁势为

$$\phi_\beta=\frac{e_\beta}{R_{\beta\alpha}},\quad \overrightarrow{A}_\beta=\frac{e_\beta}{R_{\beta\alpha}}(\overrightarrow{n}_{\beta\alpha}(\overrightarrow{n}_{\beta\alpha}\cdot\overrightarrow{V}_\beta)+\overrightarrow{V}_\beta),$$

对动能取相对论修正

$$-m_ac^2\sqrt{1-\frac{V_a^2}{c^2}}\approx -m_ac^2+\frac{m_\alpha}{2}V_\alpha^2+\frac{1}{8c^2}m_\alpha V_\alpha^4.$$

所以 α 粒子的拉格朗日量可近似为

$$\begin{aligned}L_\alpha=&\frac{1}{2}m_\alpha V_\alpha^2+\frac{1}{8c^2}m_\alpha V_\alpha^4-e_\alpha\sum_{\beta\neq\alpha}\frac{e_\beta}{R_{\beta\alpha}}\\&+\frac{1}{2}e_\alpha\sum_{\beta\neq\alpha}\frac{e_\beta}{c^2R_{\beta\alpha}}(\overrightarrow{V}_\alpha\cdot\overrightarrow{V}_\beta+(\overrightarrow{V}_\alpha\cdot\overrightarrow{n}_{\beta\alpha})(\overrightarrow{V}_\beta\cdot\overrightarrow{n}_{\beta\alpha})).\end{aligned}$$

则带电粒子系统的总的拉格朗日量为

$$\begin{aligned}L=&\sum_\alpha\frac{1}{2}m_\alpha V_\alpha^2-\frac{1}{2}\sum_{\beta\neq\alpha}\frac{e_\alpha e_\beta}{R_{\beta\alpha}}\\&+\frac{1}{8c^2}\sum_\alpha m_\alpha V_\alpha^4+\frac{1}{4}\sum_{\beta\neq\alpha}\frac{e_\alpha e_\beta}{c^2R_{\beta\alpha}}(\overrightarrow{V}_\alpha\cdot\overrightarrow{V}_\beta+(\overrightarrow{V}_\alpha\cdot\overrightarrow{n}_{\beta\alpha})(\overrightarrow{V}_\beta\cdot\overrightarrow{n}_{\beta\alpha}))\\=&L_0+L_1,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}L_0&=\sum_\alpha\frac{1}{2}m_\alpha V_\alpha^2-\frac{1}{2}\sum_{\beta\neq\alpha}\frac{e_\alpha e_\beta}{R_{\beta\alpha}},\\L_1&=\frac{1}{8c^2}\sum_\alpha m_\alpha V_\alpha^4+\frac{1}{4}\sum_{\beta\neq\alpha}\frac{e_\alpha e_\beta}{c^2R_{\beta\alpha}}(\overrightarrow{V}_\alpha\cdot\overrightarrow{V}_\beta+(\overrightarrow{V}_\alpha\cdot\overrightarrow{n}_{\beta\alpha})(\overrightarrow{V}_\beta\cdot\overrightarrow{n}_{\beta\alpha}))\end{aligned}$$

与 L_0 相比, L_1 是 $\frac{V^2}{c^2}$ 阶小量. 即带电粒子之间的相互作用的有限速度 (光速) 传播可用增加与速度有关的瞬时相互作用来近似.

与 L 相对应的哈密顿量为

$$H=H_0+H_1,\quad H_1\ll H_0,$$

其中

$$H_0=\sum_\alpha\frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha}+\frac{1}{2}\sum_{\beta\neq\alpha}\frac{e_\alpha e_\beta}{R_{\beta\alpha}}.$$

对 L_1 实施代换 $V_\alpha=\frac{p_\alpha}{m_\alpha}\left(\text{此式由 } p_\alpha=\frac{\partial L_0}{\partial V_\alpha}\text{ 得到}\right)$，可得

$$
\begin{aligned}
H_1 &= -L_1 \\
&= -\sum_{\alpha} \frac{p_\alpha^4}{8c^2 m_\alpha^3} - \frac{1}{4}\sum_{\beta\neq\alpha} \frac{e_\alpha e_\beta}{c^2 m_\alpha m_\beta R_{\beta\alpha}} [\vec{p}_\alpha \cdot \vec{p}_\beta + (\vec{p}_\alpha \cdot \vec{n}_{\beta\alpha})(\vec{p}_\beta \cdot \vec{n}_{\beta\alpha})].
\end{aligned}
$$

10.5　例　　题

例题 10.1　对于由两个带电粒子组成的系统，在它们的质心系给出哈密顿量的表达式. 假定它们的质量和电荷分别为 m_1, e_1 和 m_2, e_2.

解　我们已经给出了普遍公式

$$
\begin{aligned}
&H = H_0 + H_1, \\
&H_0 = \sum_{\alpha} \frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha} + \frac{1}{2}\sum_{\beta\neq\alpha} \frac{e_\alpha e_\beta}{R_{\beta\alpha}}, \\
&H_1 = -\sum_{\alpha} \frac{p_\alpha^4}{8c^2 m_\alpha^3} - \frac{1}{4}\sum_{\beta\neq\alpha} \frac{e_\alpha e_\beta}{c^2 m_\alpha m_\beta R_{\beta\alpha}} [\vec{p}_\alpha \cdot \vec{p}_\beta + (\vec{p}_\alpha \cdot \vec{n}_{\beta\alpha})(\vec{p}_\beta \cdot \vec{n}_{\beta\alpha})].
\end{aligned}
$$

对二粒子系统, 定义：质心坐标

$$
\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2},
$$

相对坐标

$$
\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2,
$$

在质心系 ($\vec{R} = 0$)

$$
\vec{p}_1 = \vec{p}, \quad \vec{p}_2 = -\vec{p}, \quad \vec{p} = \mu \vec{v}, \quad \left(\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right),
$$

则有

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{\beta\neq\alpha} \frac{e_\alpha e_\beta}{R_{\beta\alpha}} &= \frac{e_1 e_2}{r}, \\
H_0 =& \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \vec{p}^{\,2} + \frac{e_1 e_2}{r}, \\
-\sum_{\alpha} \frac{p_\alpha^4}{8c^2 m_\alpha^3} &= -\frac{1}{8c^2}\left(\frac{1}{m_1^3} + \frac{1}{m_2^3}\right) \vec{p}^{\,4}, \\
-\frac{1}{4}\sum_{\beta\neq\alpha} &\frac{e_\alpha e_\beta}{c^2 m_\alpha m_\beta R_{\beta\alpha}} [\vec{p}_\alpha \cdot \vec{p}_\beta + (\vec{p}_\alpha \cdot \vec{n}_{\beta\alpha})(\vec{p}_\beta \cdot \vec{n}_{\beta\alpha})] \\
=& \frac{e_1 e_2}{2m_1 m_2 c^2 r}\left(\vec{p}^{\,2} + \frac{1}{r^2}(\vec{p} \cdot \vec{r})^2\right),
\end{aligned}
$$

最终得到

$$
H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \vec{p}^{\,2} + \frac{e_1 e_2}{r} - \frac{1}{8c^2}\left(\frac{1}{m_1^3} + \frac{1}{m_2^3}\right) \vec{p}^{\,4} + \frac{e_1 e_2}{2m_1 m_2 c^2 r}\left(\vec{p}^{\,2} + \frac{1}{r^2}(\vec{p} \cdot \vec{r})^2\right).
$$

第 11 章 电磁波的辐射

11.1 远离带电粒子系统处的场

假定带电粒子系统的运动限制在有限体积 V_o 中, 它的特征尺度为 a, 粒子在 V_o 中运动的特征速度为 V, 特征周期为 T, 则有 $a = VT$.

做周期运动的带电粒子在远离体积 V_o 的观测点 $\overrightarrow{r}$ ($r \gg a$) 处给出波长为 $\lambda = cT$ 的辐射波, 所以有关系式

$$\frac{a}{\lambda} = \frac{V}{c},$$

其中 c 是光速.

因为 $r \gg a$, 则 $R = |\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}| \approx r - \overrightarrow{r'} \cdot \overrightarrow{n}$ 是好的近似, 这里 $\overrightarrow{n} = \dfrac{\overrightarrow{r}}{r}$.

在延迟势的表达式

$$\phi(\overrightarrow{r}, t) = \int \frac{\rho(\overrightarrow{r'}, t - \frac{R}{c})}{R} \mathrm{d}\overrightarrow{r'}$$

和

$$\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\overrightarrow{j}(\overrightarrow{r'}, t - \frac{R}{c})}{R} \mathrm{d}\overrightarrow{r'}$$

中, 因子 $\dfrac{1}{R} \approx \dfrac{1}{r}$ 是一个好的近似, 而 $t - \dfrac{R}{c} \approx t - \dfrac{r}{c} + \dfrac{\overrightarrow{r'} \cdot \overrightarrow{n}}{c}$ 中的最后一项是否可以略去, 要看在 $\dfrac{\overrightarrow{r'} \cdot \overrightarrow{n}}{c}$ 的时间间隔内 ρ 和 $\overrightarrow{j}$ 的变化大小. 所以当 $r \gg a$ 时, 可以用近似表达式

$$\phi(\overrightarrow{r}, t) = \frac{1}{r} \int \rho \left(\overrightarrow{r'}, t - \frac{r}{c} + \frac{\overrightarrow{r'} \cdot \overrightarrow{n}}{c} \right) \mathrm{d}\overrightarrow{r'}, \tag{11.1}$$

$$\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r}, t) = \frac{1}{cr} \int \overrightarrow{j} \left(\overrightarrow{r'}, t - \frac{r}{c} + \frac{\overrightarrow{r'} \cdot \overrightarrow{n}}{c} \right) \mathrm{d}\overrightarrow{r'}. \tag{11.2}$$

当 $r \gg \lambda$ 时, 则在观测点附近的小范围内辐射波可近似地视为是平面波, 这时有

$$\begin{aligned} \overrightarrow{H} &= \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A} = \frac{1}{c} \dot{\overrightarrow{A}} \times \overrightarrow{n}, \\ \overrightarrow{E} &= \overrightarrow{H} \times \overrightarrow{n}, \end{aligned} \tag{11.3}$$

所以只计算矢量势 (11.2) 就够了.

应当指出, 在第 9 章讨论平面波时给出的公式 $\vec{E} = -\frac{1}{c}\dot{\vec{A}}$ 在这里不适用, 因为在那里 $\vec{A}$ 和 ϕ 满足的附加条件为 $\phi = 0$ 和 $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, 而这里的附加条件为

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0.$$

还应当指出, 在导出上面的 $\vec{H}$ 和 $\vec{E}$ 的公式时只利用了条件 $r \gg a$ 和 $r \gg \lambda$, 并没有要求 $\lambda \gg a$, 所以上面的公式既适用于带电粒子的低速运动, 也适用于带电粒子的高速运动.

在平面波近似下, 辐射波的能流密度为

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E} \times \vec{H} = \frac{c}{4\pi}|\vec{H}|^2\vec{n}.$$

由此可得辐射功率的角分布

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{cr^2}{4\pi}|\vec{H}|^2 \tag{11.4}$$

和总辐射功率

$$P = \frac{cr^2}{4\pi}\int |\vec{H}|^2 \mathrm{d}\Omega. \tag{11.5}$$

11.2 电偶极, 磁偶极和电四极辐射

如果带电粒子体系在体积 V_o 中做低速运动 $(a \ll \lambda)$, 即在 $\frac{\vec{r'} \cdot \vec{n}}{c}$ 的时间间隔内 ρ 和 $\vec{j}$ 的变化不大, 这时对 $\vec{j}$ 可在 $\left(t - \frac{r}{c}\right)$ 处作泰勒展开

$$\vec{j}\left(\vec{r'}, t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{r'} \cdot \vec{n}}{c}\right) \approx \vec{j}\left(\vec{r'}, t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{c}\vec{n} \cdot \vec{r'}\frac{\partial}{\partial t'}(\vec{j}(\vec{r'}, t'))|_{t'=t-\frac{r}{c}},$$

略去上展开式中的时间导数项时得到电偶极辐射

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}, t) &\approx \frac{1}{cr}\int \vec{j}\left(\vec{r'}, t - \frac{r}{c}\right)\mathrm{d}\vec{r'} \\ &= \frac{1}{cr}\sum_\alpha e_\alpha \vec{V}_\alpha\left(t - \frac{r}{c}\right) = \frac{\dot{\vec{d}}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{cr},\end{aligned}$$

其中 $\vec{d}$ 是系统的电偶极矩.

在此近似下有

$$\overrightarrow{H}=\frac{1}{c}\dot{\overrightarrow{A}}\times\overrightarrow{n}=\frac{\ddot{\overrightarrow{d}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\times\overrightarrow{n}}{c^2r},\quad \overrightarrow{E}=\overrightarrow{H}\times\overrightarrow{n}.$$

由此得到电偶极辐射功率的角分布为

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{cr^2}{4\pi}|\overrightarrow{H}|^2=\frac{1}{4\pi c^3}(\ddot{\overrightarrow{d}})^2\sin^2\theta \tag{11.6}$$

其中 θ 是电偶极子矢量方向与辐射波传播方向之间的夹角.

辐射功率 (单位时间辐射的总能量) 为

$$P=\int(\ddot{\overrightarrow{d}})^2\sin^2\theta\frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi c^3}=\frac{2}{3c^3}(\ddot{\overrightarrow{d}})^2. \tag{11.7}$$

对于一个在外场中做加速运动的带电粒子 e 有

$$\overrightarrow{d}=e\overrightarrow{r},\quad \ddot{\overrightarrow{d}}=e\overrightarrow{w},$$

由此可得它的辐射功率为

$$P=\frac{2e^2w^2}{3c^3}, \tag{11.8}$$

其中 w 是粒子的加速度. 此公式的适用条件为带电粒子做低速运动.

在展开式 $\overrightarrow{j}\left(\overrightarrow{r'},t-\frac{R}{c}\right)\approx\overrightarrow{j}\left(\overrightarrow{r'},t-\frac{r}{c}\right)+\frac{1}{c}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{r'}\frac{\partial}{\partial t'}(\overrightarrow{j}(\overrightarrow{r'},t'))|_{t'=t-\frac{r}{c}}$ 中, 时间的一阶导数项的贡献为

$$\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r},t)\approx\frac{1}{c^2r}\frac{\partial}{\partial t}\int(\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{r'})\overrightarrow{j}\left(\overrightarrow{r'},t-\frac{r}{c}\right)\mathrm{d}\overrightarrow{r'}.$$

下面将阐明此项给出带电粒子体系的磁偶极和电四极辐射.

对于由点电荷组成的带电粒子体系

$$\frac{1}{c^2r}\frac{\partial}{\partial t}\int(\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{r'})\overrightarrow{j}\left(\overrightarrow{r'},t-\frac{r}{c}\right)\mathrm{d}\overrightarrow{r'}=\frac{1}{c^2r}\frac{\partial}{\partial t}\sum e_\alpha\overrightarrow{V}_\alpha(\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{r}_\alpha)|_{t'=t-\frac{r}{c}}.$$

因为

$$\begin{aligned}
&\sum e_\alpha\overrightarrow{V}_\alpha(\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{r}_\alpha)\\
=&\frac{1}{2}\sum e_\alpha\overrightarrow{V}_\alpha(\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{r}_\alpha)+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum e_\alpha\overrightarrow{r}_\alpha(\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{r}_\alpha)-\frac{1}{2}\sum e_\alpha\overrightarrow{r}_\alpha(\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{V}_\alpha)\\
=&\frac{1}{2}\sum e_\alpha(\overrightarrow{r}_\alpha\times\overrightarrow{V}_\alpha)\times\overrightarrow{n}+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum e_\alpha\overrightarrow{r}_\alpha(\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{r}_\alpha)\\
=&c\overrightarrow{m}\times\overrightarrow{n}+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum e_\alpha\overrightarrow{r}_\alpha(\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{r}_\alpha),
\end{aligned}$$

其中 $\vec{m}=\dfrac{1}{2c}\sum e_\alpha(\vec{r}_\alpha\times\vec{V}_\alpha)$ 是带电粒子体系的磁偶极矩. 在平面波近似下 $\vec{H}=\dfrac{1}{c}\dot{\vec{A}}\times\vec{n}$, 所以在 $\vec{A}$ 中加入正比例于 $\vec{n}$ 的项磁场 $\vec{H}$ 保持不变, 这导致我们可以用

$$\frac{1}{6}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum e_\alpha(3\vec{r}_\alpha(\vec{n}\cdot\vec{r}_\alpha)-r_\alpha^2\vec{n})=\frac{1}{6}\dot{\vec{D}}$$

来代替

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum e_\alpha\vec{r}_\alpha(\vec{n}\cdot\vec{r}_\alpha),$$

其中 $D_\alpha=\sum D_{\alpha\beta}n_\beta$, 而 $D_{\alpha\beta}=\sum e(3x_\alpha x_\beta-r^2\delta_{\alpha\beta})$ 是带电粒子体系的电四极矩.

所以在满足 $r\gg\lambda\gg a$ 的条件下得到

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\left\{\frac{\dot{\vec{d}}}{cr}+\frac{\dot{\vec{m}}\times\vec{n}}{cr}+\frac{\ddot{\vec{D}}}{6c^2r}\right\}_{t'=t-\frac{r}{c}},$$

$$\vec{H}=\frac{1}{c}\dot{\vec{A}}\times\vec{n}=\frac{1}{c^2r}\left\{\ddot{\vec{d}}+\ddot{\vec{m}}\times\vec{n}+\frac{1}{6c}\dddot{\vec{D}}\right\}_{t'=t-\frac{r}{c}}\times\vec{n},$$

$$\vec{E}=\vec{H}\times\vec{n}.$$

在此近似下辐射功率的角分布为

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\varOmega}=\frac{cr^2}{4\pi}\vec{H}^2=\frac{1}{4\pi c^3}\left\{(\ddot{\vec{d}}\times\vec{n}+\frac{1}{6c}\dddot{\vec{D}}\times\vec{n}+(\ddot{\vec{m}}\times\vec{n})\times\vec{n})_{t'=t-\frac{r}{c}}\right\}^2,\tag{11.9}$$

总辐射功率为 (见例题 11.1)

$$\begin{aligned}P&=\frac{1}{4\pi c^3}\int\left\{(\ddot{\vec{d}}\times\vec{n}+\frac{1}{6c}\dddot{\vec{D}}\times\vec{n}+(\ddot{\vec{m}}\times\vec{n})\times\vec{n})_{t'=t-\frac{r}{c}}\right\}^2\mathrm{d}\varOmega\\&=\frac{2}{3c^3}(\ddot{\vec{d}})^2+\frac{2}{3c^3}(\ddot{\vec{m}})^2+\frac{1}{180c^5}(\dddot{D})^2_{\alpha\beta}.\end{aligned}\tag{11.10}$$

11.3　带电粒子体系近处的辐射场

为了更好地理解辐射场的特征, 下面以电偶极辐射为例讨论带电粒子体系近处的辐射场. 所谓近处是指条件 $r\gg\lambda$ 已不再成立, 但条件 $r\gg a$ 和 $\lambda\gg a$ 仍然成立. 这时仍有 $\vec{A}(\vec{r},t)=\dfrac{\dot{\vec{d}}}{cr}\Big|_{t'=t-\frac{r}{c}}$ 及 $\vec{H}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$.

因 $r \gg \lambda$ 不再成立, 所以即使在观测点附近的小区域内辐射场也不能视为是平面波, 这时在计算电场时公式 $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{H} \times \overrightarrow{n}$ 不能采用, 需要用公式 $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla}\phi - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}$, 即除要知道 $\overrightarrow{A}$ 以外还需要知道 ϕ.

由洛伦兹条件 $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \phi}{\partial t} = 0$, 有

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -c\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\nabla} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{d}\left(t - \dfrac{r}{c}\right)}{r}\right)\right),$$

由此可得

$$\phi = -\overrightarrow{\nabla} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{d}\left(t - \dfrac{r}{c}\right)}{r}\right),$$

所以

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{\nabla}\left(\overrightarrow{\nabla} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{d}\left(t - \dfrac{r}{c}\right)}{r}\right)\right) - \frac{\ddot{\overrightarrow{d}}\left(t - \dfrac{r}{c}\right)}{c^2 r}.$$

又因为

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\overrightarrow{d}\left(t - \dfrac{r}{c}\right)}{r}\right) = \overrightarrow{\nabla}^2\left(\frac{\overrightarrow{d}\left(t - \dfrac{r}{c}\right)}{r}\right),$$

所以有

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{\nabla}\left(\overrightarrow{\nabla} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{d}\left(t - \dfrac{r}{c}\right)}{r}\right)\right) - \overrightarrow{\nabla}^2\left(\frac{\overrightarrow{d}\left(t - \dfrac{r}{c}\right)}{r}\right) = \overrightarrow{\nabla} \times \left(\overrightarrow{\nabla} \times \left(\frac{\overrightarrow{d}\left(t - \dfrac{r}{c}\right)}{r}\right)\right).$$

对给定的 ω,

$$\overrightarrow{d} \sim \overrightarrow{d}_{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t - \frac{r}{c})} = \overrightarrow{d}_{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \quad \frac{1}{c}(\dot{\overrightarrow{d}})_{\omega} = -\mathrm{i}k\overrightarrow{d}_{\omega},$$

得到

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{H}_{\omega} &= -\mathrm{i}k\overrightarrow{\nabla} \times \left(\frac{\overrightarrow{d}_{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\right) = \mathrm{i}k\overrightarrow{d}_{\omega} \times \overrightarrow{\nabla}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\right) = \mathrm{i}k\overrightarrow{d}_{\omega} \times \overrightarrow{n}\left(\mathrm{i}k - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\right), \\
\overrightarrow{E}_{\omega} &= k^2\overrightarrow{d}_{\omega}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\right) + (\overrightarrow{d}_{\omega} \cdot \overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{\nabla}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\right) \\
&= \overrightarrow{d}_{\omega}\left(\frac{k^2}{r} + \frac{\mathrm{i}k}{r^2} - \frac{1}{r^3}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr} + \overrightarrow{n}(\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{d}_{\omega})\left(-\frac{k^2}{r} - \frac{3\mathrm{i}k}{r^2} + \frac{3}{r^3}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}.
\end{aligned}$$

如果满足条件 $r \gg \lambda$, 即 $kr \gg 1$, 则可以得到

$$\vec{H}_\omega = -k^2(\vec{d}_\omega \times \vec{n})\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}, \quad \vec{E}_\omega = \vec{H}_\omega \times \vec{n},$$

此即是电偶极辐射的结果.

如果 $r \ll \lambda$(如静电场), 即 $kr \ll 1$, 则有

$$\vec{E}_\omega = \frac{1}{r^3}(3\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{d}_\omega) - \vec{d}_\omega), \quad \vec{H}_\omega = 0,$$

此即是电偶极子的静电场.

11.4　高速运动电荷的辐射

前面讨论带电粒子低速运动时, 我们得到在 $\mathrm{d}t$ 时间间隔内辐射的总能量为 $\mathrm{d}\varepsilon = P\mathrm{d}t = \dfrac{2}{3c^3}e^2w^2\mathrm{d}t$. 当带电粒子高速运动时, 取一个参照系使粒子在此参照系中瞬时速度为零, 但 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t} \neq 0$. 显然在此参照系中公式 $\mathrm{d}\varepsilon = \dfrac{2}{3c^3}e^2w^2\mathrm{d}t$ 成立.

在$\mathrm{d}t$ 时间内带电粒子辐射出的电磁场的总四动量为

$$\mathrm{d}P_\mu = \begin{pmatrix} \mathrm{d}\vec{P} = 0 \\ \mathrm{i}\dfrac{2}{3c^4}e^2w^2\mathrm{d}t \end{pmatrix},$$

这是因电偶极辐射的角分布为 $\propto \sin^2\theta$, 即辐射场关于原点反射对称, 所以在此参照系中 $\mathrm{d}t$ 时间内辐射出的总动量 $\mathrm{d}\vec{P} = 0$.

在瞬时速度为 $\vec{V}$ 的参照系中

$$\mathrm{d}P_\mu = \begin{pmatrix} \mathrm{d}\vec{P} \\ \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{c} \end{pmatrix} = \frac{2}{3c}e^2w_\alpha w_\alpha \mathrm{d}X_\mu = \frac{2}{3c}e^2w_\alpha w_\alpha u_\mu \mathrm{d}s,$$

其中

$$w_\mu = \frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{c^2\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)^2}\begin{pmatrix} \dfrac{(\vec{w}\cdot\vec{V})\vec{V}}{c^2} + \vec{w}\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right) \\ \mathrm{i}\dfrac{(\vec{w}\cdot\vec{V})}{c} \end{pmatrix}$$

是四维加速度.

由此可得

$$w_\alpha w_\alpha = \frac{1}{c^4\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)^3}\left\{\vec{w}^2 - \frac{1}{c^2}(\vec{V}\times\vec{w})^2\right\}.$$

可以看出在 $\overrightarrow{V}=0$ 的参照系中, $w_\alpha w_\alpha=\dfrac{\overrightarrow{w}^2}{c^4}$, 给出 $\mathrm{d}P_\mu=\begin{pmatrix}\overrightarrow{P}=0\\ \mathrm{i}\dfrac{2}{3c^4}e^2w^2\mathrm{d}t\end{pmatrix}$. 所以一个高速运动的带电粒子辐射的总能量的表达式为

$$\Delta\varepsilon=\frac{2c}{3}e^2\int w_\alpha w_\alpha \mathrm{d}t=\frac{2e^2}{3c^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overrightarrow{w}^2-\dfrac{1}{c^2}(\overrightarrow{V}\times\overrightarrow{w})^2}{\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)^3}\mathrm{d}t. \tag{11.11}$$

当速度 $\overrightarrow{V}$ 与加速度 $\overrightarrow{w}$ 平行时, 可得到 $\dfrac{\mathrm{d}(\Delta\varepsilon)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2e^2}{3c^3}\gamma^6\overrightarrow{w}^2$.

当速度 $\overrightarrow{V}$ 与加速度 $\overrightarrow{w}$ 垂直时, 有 $\dfrac{\mathrm{d}(\Delta\varepsilon)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2e^2}{3c^3}\gamma^4\overrightarrow{w}^2$.

利用带电粒子在外场中的运动方程 $mc\dfrac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}s}=\dfrac{e}{c}F_{\mu\nu}u_\nu$, 辐射的总能量也可用外加电磁场表示为

$$\Delta\varepsilon=\frac{2e^4}{3m^2c^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left(\overrightarrow{E}+\dfrac{1}{c}\overrightarrow{V}\times\overrightarrow{H}\right)^2-\dfrac{1}{c^2}(\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{V})^2}{\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)}\mathrm{d}t. \tag{11.12}$$

由此式可知, 当粒子的速度接近光速时, 单位时间辐射的总能量 $\dfrac{\mathrm{d}(\Delta\varepsilon)}{\mathrm{d}t}$ 正比于粒子能量的平方. 唯一的例外是 $\overrightarrow{H}=0$, $\overrightarrow{E}/\!/\overrightarrow{V}$(如直线加速器的情况), 此时单位时间辐射的总能量 $\dfrac{\mathrm{d}(\Delta\varepsilon)}{\mathrm{d}t}$ 与粒子的能量无关.

下面讨论高速运动电荷辐射场的角分布.

这时采用由李纳–维谢尔势导出的电场和磁场的表达式是方便的. 当 $r\gg a$ 和 $r\gg\lambda$ 时, 只需考虑 $\overrightarrow{E}_2$ 和 $\overrightarrow{H}_2$ 的表达式 (见第 10 章), 并且有

$$R(t')=|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r}_0(t')|\approx r,\quad \frac{\overrightarrow{R}(t')}{R(t')}\approx\frac{\overrightarrow{r}}{r}=\overrightarrow{n}.$$

由此可得

$$\overrightarrow{E}_2(\overrightarrow{r},t)\approx\frac{e}{c^2r}\frac{\overrightarrow{n}\times\left[\left(\overrightarrow{n}-\dfrac{\overrightarrow{V}}{c}\right)\times\overrightarrow{w}\right]}{\left(1-\dfrac{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{V}}{c}\right)^3}\Big|_{t'=t-\frac{r}{c}},\quad \overrightarrow{H}_2(\overrightarrow{r},t)=\overrightarrow{n}\times\ \overrightarrow{E}_2(\overrightarrow{r},t).$$

所以辐射到立体角 $\mathrm{d}\varOmega$ 中的功率为

$$\mathrm{d}P = \frac{c\vec{E}_2^2}{4\pi} r^2 \mathrm{d}\Omega = \frac{e^2 \mathrm{d}\Omega}{4\pi c^3} \left(\frac{\vec{n} \times \left[\left(\vec{n} - \frac{\vec{V}}{c} \right) \times \vec{w} \right]}{\left(1 - \frac{\vec{n}\cdot\vec{V}}{c}\right)^3} \right)^2 \Bigg|_{t'} \tag{11.13}$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \left\{ \frac{\vec{w}^2}{\left(1 - \frac{\vec{n}\cdot\vec{V}}{c}\right)^4} + \frac{2(\vec{n}\cdot\vec{w})(\vec{w}\cdot\vec{V})}{c\left(1 - \frac{\vec{n}\cdot\vec{V}}{c}\right)^5} - \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)(\vec{n}\cdot\vec{w})^2}{\left(1 - \frac{\vec{n}\cdot\vec{V}}{c}\right)^6} \right\}_{t'} .$$

由 $\vec{E}_2(\vec{r}, t)$ 的表达式可知, 在加速度 $\vec{w}$ 的方向与 $\left(\vec{n} - \frac{\vec{V}}{c}\right)$ 的方向平行或反平行时辐射场为零.

由关系式 $t' = t - \frac{R(t')}{c}$, 可得

$$\mathrm{d}t = \mathrm{d}t' \left(1 - \frac{\vec{n}\cdot\vec{V}}{c}\right),$$

则带电粒子运动过程中辐射总能量的角分布可表示为

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\varepsilon &= \int \mathrm{d}P \mathrm{d}t \\
&= \frac{e^2 \mathrm{d}\Omega}{4\pi c^3} \int \left\{ \frac{\vec{w}^2}{\left(1 - \frac{\vec{n}\cdot\vec{V}}{c}\right)^4} + \frac{2(\vec{n}\cdot\vec{w})(\vec{w}\cdot\vec{V})}{c\left(1 - \frac{\vec{n}\cdot\vec{V}}{c}\right)^5} - \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)(\vec{n}\cdot\vec{w})^2}{\left(1 - \frac{\vec{n}\cdot\vec{V}}{c}\right)^6} \right\}_{t'} \mathrm{d}t \\
&= \frac{e^2 \mathrm{d}\Omega}{4\pi c^3} \int \left\{ \frac{\vec{w}^2}{\left(1 - \frac{\vec{n}\cdot\vec{V}}{c}\right)^3} + \frac{2(\vec{n}\cdot\vec{w})(\vec{w}\cdot\vec{V})}{c\left(1 - \frac{\vec{n}\cdot\vec{V}}{c}\right)^4} - \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)(\vec{n}\cdot\vec{w})^2}{\left(1 - \frac{\vec{n}\cdot\vec{V}}{c}\right)^5} \right\}_{t'} \mathrm{d}t'.
\end{aligned} \tag{11.14}$$

在极端相对论的情况下 $\left(\frac{V}{c} \sim 1\right)$, 辐射总能量的角分布有很奇特的特征.

令 θ 表示 $\vec{n}$ 和 $\vec{V}$ 之间的夹角, 则在 $\left(1 - \frac{\vec{n}\cdot\vec{V}}{c}\right)$ 的值很小时 $(\theta \sim 0)$ 辐射强度的值很大.

由

$$1-\frac{V}{c}\cos\theta\approx 1-\frac{V}{c}+\frac{1}{2}\theta^2\approx\frac{1}{2}\left(1-\frac{V^2}{c^2}+\theta^2\right)$$

可知辐射集中在沿速度方向 $(\theta\sim 0)$ 且 $\Delta\theta\sim\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}$ 的范围内.

下面讨论两种特殊情况.

当 $\vec{w}$ 与 $\vec{V}$ 平行时, 可得

$$\mathrm{d}P(t')=\frac{e^2\mathrm{d}\Omega}{4\pi c^3}\frac{w^2\sin^2\theta}{\left(1-\dfrac{V}{c}\cos\theta\right)^5}\Bigg|_{t'},$$

由此式可看出辐射能量的角分布与 ϕ 无关, 且 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 时辐射强度为零.

在非相对论情况下此式给出电偶极辐射的角分布.

对极端相对论的情况, 由此式可看出辐射强度集中在沿速度方向且 $\Delta\theta\sim\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}$ 的范围内, 最大峰值位于

$$\theta_{\max}=\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\quad (\text{图11.1}).$$

(令 $\chi=\cos\theta$, $f(\chi)=\dfrac{1-\chi^2}{(1-\beta\chi)^5}$, 由 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\chi}=0$ 可得

$$\cos\theta=\frac{1}{3\beta}(\sqrt{1+15\beta^2}-1),$$

又因为 $\cos\theta_{\max}\approx 1-\dfrac{\theta_{\max}^2}{2}$, 令 $\delta^2=1-\beta^2$, 则

$$\frac{1}{3\beta}(\sqrt{1+15\beta^2}-1)\approx 1-\frac{1}{8}\delta^2,$$

由此可得 $\theta_{\max}\approx\dfrac{1}{2}\sqrt{1-\beta^2}$)

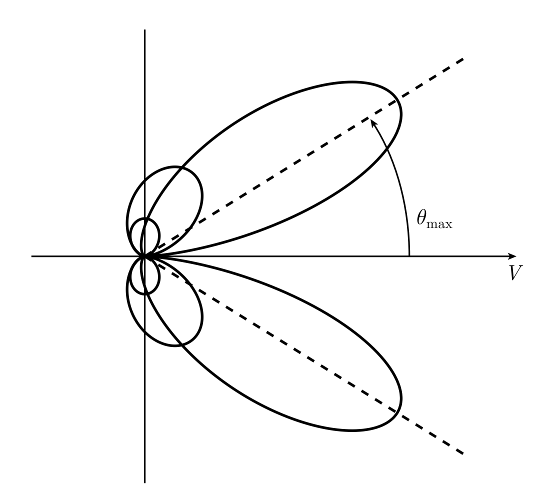


图 11.1　辐射角分布

当 $\vec{w}$ 与 $\vec{V}$ 垂直时, 则 $\vec{w}$ 和 $\vec{V}$ 确定一平面 (图 11.2). 取 $\vec{e}_z /\!/ \vec{V}$, $\vec{e}_x /\!/ \vec{w}$, 则

$$\vec{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta),$$

$$\vec{n}\cdot\vec{V} = V\cos\theta, \quad \vec{n}\cdot\vec{w} = w\sin\theta\cos\phi,$$

可得

$$\mathrm{d}P(t') = \frac{e^2\mathrm{d}\Omega}{4\pi c^3}\frac{w^2}{\left(1-\dfrac{V}{c}\cos\theta\right)^3}\left(1-\frac{\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)\sin^2\theta\cos^2\phi}{\left(1-\dfrac{V}{c}\cos\theta\right)^2}\right)_{t'}.$$

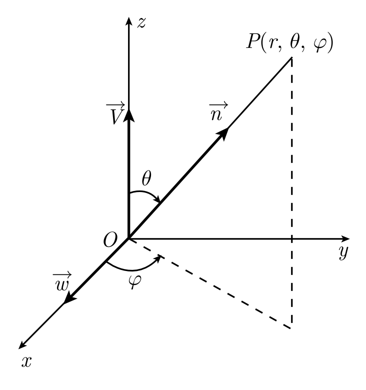


图 11.2　速度与加速度垂直

容易看出, 辐射强度关于 $\phi=0$ 的平面 (即 $\overrightarrow{w}$ 和 $\overrightarrow{V}$ 确定的平面) 对称. 在此平面上,

$$\mathrm{d}P(t')=\frac{e^2w^2\mathrm{d}\Omega}{4\pi c^3}\frac{(\beta-\cos\theta)^2}{(1-\beta\cos\theta)^5},$$

所以对极端相对论的情况 $\left(\beta=\dfrac{V}{c}\to 1\right)$:

当 $\theta=0$ 时, $\mathrm{d}P(t')=\dfrac{e^2w^2\mathrm{d}\Omega}{4\pi c^3}\dfrac{1}{(1-\beta)^3}\to\infty$;

当 $\theta=\arccos(\beta)$ 时, $\mathrm{d}P(t')=0$;

当 $\theta=\pi$ 时, $\mathrm{d}P(t')=\dfrac{e^2w^2\mathrm{d}\Omega}{4\pi c^3}\dfrac{1}{(1+\beta)^3}$.

11.5　辐射场的谱分析

由式 (11.13) 得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\varepsilon&=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}P\mathrm{d}t=\frac{e^2\mathrm{d}\Omega}{4\pi c^3}\int_{-\infty}^{\infty}\left.\left(\frac{\overrightarrow{n}\times\left[\left(\overrightarrow{n}-\dfrac{\overrightarrow{V}}{c}\right)\times\overrightarrow{w}\right]}{\left(1-\dfrac{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{V}}{c}\right)^3}\right)^2\right|_{t'}\mathrm{d}t\\&=\frac{e^2\mathrm{d}\Omega}{4\pi c^3}\int_{-\infty}^{\infty}\overrightarrow{A}(t)^2\mathrm{d}t=\frac{e^2\mathrm{d}\Omega}{4\pi^2c^3}\int_0^{\infty}|\overrightarrow{A}(\omega)|^2\mathrm{d}\omega,\end{aligned}$$

这里记

$$\overrightarrow{A}(t)=\left.\left(\frac{\overrightarrow{n}\times\left[\left(\overrightarrow{n}-\dfrac{\overrightarrow{V}}{c}\right)\times\overrightarrow{w}\right]}{\left(1-\dfrac{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{V}}{c}\right)^3}\right)\right|_{t'},$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A}(\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}\overrightarrow{A}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\left.\left(\frac{\overrightarrow{n}\times\left[\left(\overrightarrow{n}-\dfrac{\overrightarrow{V}}{c}\right)\times\overrightarrow{w}\right]}{\left(1-\dfrac{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{V}}{c}\right)^2}\right)\right|_{t'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\left(t'+\frac{R(t')}{c}\right)}\mathrm{d}t'\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\left.\left(\frac{\overrightarrow{n}\times\left[\left(\overrightarrow{n}-\dfrac{\overrightarrow{V}}{c}\right)\times\overrightarrow{w}\right]}{\left(1-\dfrac{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{V}}{c}\right)^2}\right)\right|_{t'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\left(t'-\frac{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{r}_0(t')}{c}\right)}\mathrm{d}t',\end{aligned}$$

其中略去了相因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}$.

借助公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\vec{n}\times\left[\vec{n}\times\dfrac{\vec{V}}{c}\right]}{1-\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{V}}{c}}=\left(\frac{\vec{n}\times\left[\left(\vec{n}-\dfrac{\vec{V}}{c}\right)\times\dfrac{\vec{w}}{c}\right]}{\left(1-\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{V}}{c}\right)^2}\right),$$

可得

$$\vec{A}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\vec{n}\times[\vec{n}\times\vec{V}]}{1-\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{V}}{c}}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}_0(t)}{c})}\mathrm{d}t. \tag{11.15}$$

实施分部积分, 有

$$\vec{A}(\omega)=\mathrm{i}\omega\int_{-\infty}^{\infty}\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{V})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}_0(t)}{c})}\mathrm{d}t, \tag{11.16}$$

由此得到

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\Omega}=\frac{e^2\omega^2}{4\pi^2c^3}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{V})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}_0(t)}{c})}\mathrm{d}t\right|^2, \tag{11.17}$$

此公式适用于各种频率的辐射.

下面讨论辐射波的低频极限, 当 $\omega\to 0$ 时, 借助式 (11.15) 有

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\Omega}=\frac{1}{4\pi^2c^3}\left[e\left\{\frac{\vec{V}_2\times\vec{n}}{1-\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{V}_2}{c}}-\frac{\vec{V}_1\times\vec{n}}{1-\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{V}_1}{c}}\right\}\right]^2, \tag{11.18}$$

此低频辐射公式也可用如下方法得到：

场的谱分解给出

$$\vec{H}_\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\vec{H}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t,\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\sim 1.$$

因为在平面波近似下的辐射磁场为

$$\vec{H}=\frac{1}{c}\dot{\vec{A}}\times\vec{n},$$

可得

$$\vec{H}_\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\vec{H}(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{c}(\vec{A}_2-\vec{A}_1)\times\vec{n},$$

其中 $\vec{A}_1$ 和 $\vec{A}_2$ 分别是碰撞前和碰撞后带电粒子产生的矢量势.

由此得到在碰撞过程中频率在 ω 与 $\omega+\mathrm{d}\omega$ 间隔内辐射能量的角分布为

$$\mathrm{d}\varepsilon_\omega = 2\cdot\frac{cr^2}{4\pi}|\vec{H}_\omega|^2\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} = \frac{r^2}{4\pi^2 c}[(\vec{A}_2-\vec{A}_1)\times\vec{n}]^2\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega.$$

将 $\vec{A}_1$ 和 $\vec{A}_2$ 用带电粒子的李纳–维谢尔势带入最终得到

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega} = \frac{1}{4\pi^2c^3}\left[e\left\{\frac{\vec{V}_2\times\vec{n}}{1-\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{V}_2}{c}} - \frac{\vec{V}_1\times\vec{n}}{1-\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{V}_1}{c}}\right\}\right]^2.$$

假定 τ 是带电粒子的碰撞时间, $\vec{H}(t)$ 是碰撞过程产生的辐射场. 当 ω 很小时有 $\tau\omega\ll 1$, 则 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\sim 1$. 当碰撞时间非常短 (如粒子的 β 衰变; 电子束打到固体表面上速度突变为零 —— 韧致辐射), 此时 ω 不一定很小, 但仍满足 $\tau\omega\ll 1$, 即仍有 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\sim 1$, 即低频极限的公式仍然适用.

对于辐射波的给定极化 $\vec{e}_{\lambda'}$, 则有

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega} = \frac{e^2}{4\pi^2c^3}\left|\vec{e}^{\,*}_{\lambda'}\cdot\left(\frac{\vec{V}_2}{1-\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{V}_2}{c}} - \frac{\vec{V}_1}{1-\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{V}_1}{c}}\right)\right|^2.$$

对于带电粒子散射时小角度偏转的情况

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_1 + \Delta\vec{V},$$

记 $\vec{V}=\vec{V}_1$, 精确到 $\dfrac{|\Delta\vec{V}|}{|\vec{V}|}$ 的一阶项, 得到

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2c^3}\left|\vec{e}^{\,*}_{\lambda'}\cdot\left(\frac{\Delta\vec{V}+\vec{n}\times\left(\dfrac{\vec{V}}{c}\times\Delta\vec{V}\right)}{\left(1-\vec{n}\cdot\dfrac{V}{c}\right)^2}\right)\right|^2, \tag{11.19}$$

其中 $\vec{e}_\lambda$ 是辐射场的单位极化矢量, 它可以在 $(\vec{n},\vec{V})$ 平面上, 也可以和 $(\vec{n},\vec{V})$ 平面垂直.

为讨论的方便, 假定 $\Delta\vec{V}$ 与 $\vec{V}$ 垂直并对 $\vec{V}$ 的方向取平均, 则可得到

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{/\!/}}{\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2c^3}|\Delta\vec{V}|^2\frac{\left(\dfrac{V}{c}-\cos\theta\right)^2}{\left(1-\dfrac{V}{c}\cos\theta\right)^4},$$

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_\perp}{\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c^3}|\Delta\vec{V}|^2 \frac{1}{\left(1-\frac{V}{c}\cos\theta\right)^2},$$

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\omega} = \frac{2}{3\pi}\frac{e^2}{c^3}\gamma^2|\Delta\vec{V}|^2.$$

假定粒子在散射过程中的四动量转移为 Q, 则对于弹性散射

$$Q^2 = M^2\gamma^2|\Delta\vec{V}|^2,$$

所以对于质量为 M 电荷为 ze 的粒子的散射在低频极限下, 有

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\omega} = \frac{2}{3\pi}\frac{z^2e^2}{M^2c^3}Q^2, \tag{11.20}$$

此式对于相对论和非相对论的情况都适用, 条件是四动量转移不太大.

11.6 同步辐射

带电粒子在均匀恒定磁场中以速度 V 做圆周运动时所给出的辐射称为同步辐射. 因为这种辐射有很好的方向性和很宽的频率范围, 所以近年来同步辐射光源得到了广泛的重要应用. 令恒定磁场 $\vec{H}$ 沿负 z 轴 (电场 $\vec{E}=0$) 方向, 则带电粒子的圆轨道在 xy 平面内. 带电粒子运动方程为

$$\dot{\vec{p}} = \frac{e}{c}\vec{V}\times\vec{H}, \quad \vec{p} = \frac{m\vec{V}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{1}{c^2}\varepsilon\vec{V}, \quad \varepsilon\text{是常数},$$

所以

$$\varepsilon\dot{\vec{V}} = \varepsilon\vec{w} = ce\vec{V}\times\vec{H},$$

此方程的解给出

$$\omega_H = \frac{eHc}{\varepsilon} = \frac{eH}{mc}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}},$$

半径为

$$r = \frac{V}{\omega_H} = \frac{mcV}{eH\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega_H} = \frac{2\pi mc}{eH\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

加速度为

$$w = \frac{eHV}{mc}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}.$$

代入用外场表示的辐射强度表达式, 得到

$$P = \frac{2e^4H^2V^2}{m^2c^5\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)}. \tag{11.21}$$

下面讨论同步辐射的角分布.

记 $\overrightarrow{H} = -H\overrightarrow{e}_z$, $\overrightarrow{V} = V_x\overrightarrow{e}_x + V_y\overrightarrow{e}_y$, 令辐射方向 $\overrightarrow{n}$ 在 yz 平面内, θ 是 $\overrightarrow{n}$ 和 $\overrightarrow{e}_y$ 之间的夹角, $\phi = \omega_H t$ 是粒子的轨道矢量 $\overrightarrow{r}$ 与 $\overrightarrow{e}_x$ 轴的夹角 (图 11.3). 则

$$V_x = -V\sin\phi, \quad V_y = V\cos\phi,$$

$$\overrightarrow{n} = \cos\theta\overrightarrow{e}_y + \sin\theta\overrightarrow{e}_z.$$

所以

$$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{V} = V\cos\theta\cos\phi(\overrightarrow{e}_y\cdot\overrightarrow{e}_y) = V\cos\theta\cos\phi.$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{w} &= \frac{e}{mc}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\overrightarrow{V}\times\overrightarrow{H}\\ &= \frac{e}{m}(V_x\overrightarrow{e}_x + V_y\overrightarrow{e}_y)\times(-H\overrightarrow{e}_z)\\ &= \frac{eH}{mc}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}(V_x\overrightarrow{e}_y - V_y\overrightarrow{e}_x).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{n} &= -\frac{eHV}{mc}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\cos\theta\sin\phi\\ &= -w\cos\theta\sin\phi, \quad \overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{V} = 0.\end{aligned}$$

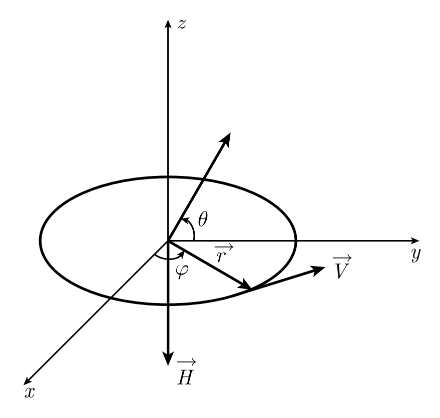


图 11.3

在一个周期内对时间求平均的辐射强度的角分布为

$$\overline{\mathrm{d}P}=\mathrm{d}\Omega\frac{e^4H^2V^2}{8\pi^2m^2c^5}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\int_0^{2\pi}\frac{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\sin^2\theta+\left(\frac{V}{c}-\cos\theta\cos\phi\right)^2}{\left(1-\frac{1}{c}V\cos\theta\cos\phi\right)^5}\mathrm{d}\phi$$

$$=\mathrm{d}\Omega\frac{e^4H^2V^2}{8\pi^2m^2c^5}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\left\{\frac{2+\frac{V^2}{c^2}\cos^2\theta}{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\cos^2\theta\right)^{\frac{5}{2}}}-\frac{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\cos^2\theta\left(4+\frac{V^2}{c^2}\cos^2\theta\right)}{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\cos^2\theta\right)^{\frac{7}{2}}}\right\}. \tag{11.22}$$

定义

$$R=\frac{\left(\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\theta=0}}{\left(\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\theta=\frac{\pi}{2}}}=\frac{4+3\frac{V^2}{c^2}}{8\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)},$$

当 $\frac{V}{c}\to 1$ 时, $R\to\infty$, 即高速带电粒子的辐射主要集中在轨道平面内 $(\theta=0)$.

由于分母中有因子 $\left(1-\frac{V^2}{c^2}\cos^2\theta\right)$ 的高次幂, 所以辐射集中在 $\Delta\theta\sim\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$ 的范围内.

下面讨论同步辐射的频谱.

令 $\vec{r}_0(t)$ 是做周期运动的带电粒子的圆轨道, 则

$$\vec{A}_n(\vec{r})\approx\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{cr}\frac{e}{T}\oint\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\omega_Ht-\vec{k}\cdot\vec{r}_0)}\mathrm{d}\vec{r}_0,$$

其中 $k=\frac{n\omega_H}{c}$.

记

$$(r_0)_x=r_0\cos\omega_Ht=r_0\cos\phi,\quad (r_0)_y=r_0\sin\omega_Ht=r_0\sin\phi,$$

则有

$$\vec{r}_0=\widehat{e}_xr_0\cos\phi+\widehat{e}_yr_0\sin\phi,\quad \mathrm{d}\vec{r}_0=(-\widehat{e}_xr_0\sin\phi+\widehat{e}_yr_0\cos\phi)\mathrm{d}\phi,$$

$$\vec{k}\cdot\vec{r}_0=\frac{n\omega_H}{c}r_0\cos\theta\sin\phi=\frac{nV}{c}\cos\theta\sin\phi.$$

由此可得

$$\vec{A}_n(\vec{r})=e\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{cr}\frac{1}{T}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\phi-\frac{nV}{c}\cos\theta\sin\phi)}(-\widehat{e}_xr_0\sin\phi+\widehat{e}_yr_0\cos\phi)\mathrm{d}\phi,$$

即

$$(A_n)_x = -eV\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{cr}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\phi-\frac{nV}{c}\cos\theta\sin\phi)}\sin\phi\mathrm{d}\phi,$$

$$(A_n)_y = eV\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{cr}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\phi-\frac{nV}{c}\cos\theta\sin\phi)}\cos\phi\mathrm{d}\phi.$$

利用贝塞尔函数的积分表示

$$\mathrm{J}_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\phi-x\sin\phi)}\mathrm{d}\phi,\quad \mathrm{J}_n^{'}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\phi-x\sin\phi)}(-\mathrm{i}\sin\phi)\mathrm{d}\phi.$$

得到

$$(A_n)_x = -\frac{\mathrm{i}eV}{cr}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\mathrm{J}'\left(\frac{nV}{c}\cos\theta\right).$$

因为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\phi-\frac{nV}{c}\cos\theta\sin\phi)}\\ =&\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\phi-\frac{nV}{c}\cos\theta\sin\phi)}|_0^{2\pi}=0\\ =&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\phi-\frac{nV}{c}\cos\theta\sin\phi)}\left(\mathrm{i}n-\mathrm{i}\frac{nV}{c}\cos\theta\cos\phi\right)\mathrm{d}\phi\\ =&\mathrm{i}n\mathrm{J}_n\left(\frac{nV}{c}\cos\theta\right)-\mathrm{i}\frac{nV}{c}\cos\theta\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\phi-nV\cos\theta\sin\phi)}\cos\phi\mathrm{d}\phi.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\phi-\frac{nV}{c}\cos\theta\sin\phi)}\cos\phi\mathrm{d}\phi\\ =&\frac{nc}{nV\cos\theta}\mathrm{J}_n\left(\frac{nV}{c}\cos\theta\right)=\frac{1}{V\cos\theta}\mathrm{J}_n(nV\cos\theta),\end{aligned}$$

即

$$(A_n)_y = \frac{e}{r\cos\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\mathrm{J}_n\left(\frac{nV}{c}\cos\theta\right).$$

利用公式 $\overrightarrow{H}_n = \mathrm{i}\overrightarrow{k}\times\overrightarrow{A}_n$ 和 $\mathrm{d}P_n = \frac{c}{2\pi}|\overrightarrow{H}_n|^2r^2\mathrm{d}\Omega$, 因为

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{H}_n|^2 = |\overrightarrow{k}\times\overrightarrow{A}_n|^2 &= k^2\{(\cos\theta\overrightarrow{e}_y+\sin\theta\overrightarrow{e}_z)\times((A_n)_x\overrightarrow{e}_x+(A_n)_y\overrightarrow{e}_y)\}^2\\ &= k^2\{-\cos\theta(A_n)_x\overrightarrow{e}_z+\sin\theta(A_n)_x\overrightarrow{e}_y-\sin\theta(A_n)_y\overrightarrow{e}_x\}^2\\ &= k^2\{(A_n)_x^2+\sin^2\theta(A_n)_y^2\},\end{aligned}$$

其中

$$k = \frac{n\omega_H}{c},\quad \omega_H = \frac{eH}{mc}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}.$$

由此可以得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}P_n &= \frac{c}{2\pi}|\vec{H}_n|^2 r^2 \mathrm{d}\Omega \\ &= \frac{n^2 e^4 H^2}{2\pi m^2 c^3}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\left\{\tan^2\theta \mathrm{J}_n^2\left(\frac{nV}{c}\cos\theta\right)+\frac{V^2}{c^2}\mathrm{J}_n'\left(\frac{nV}{c}\cos\theta\right)\right\}\mathrm{d}\Omega. \quad (11.23)\end{aligned}$$

对于给定的 n, 总辐射功率必须对立体角积分

$$P_n=\int \mathrm{d}P_n=\frac{n^2 e^4 H^2}{2\pi m^2 c^3}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\int\{\tan^2\theta \mathrm{J}_n^2\left(\frac{nV}{c}\cos\theta\right)+\frac{V^2}{c^2}\mathrm{J}_n'\left(\frac{nV}{c}\cos\theta\right)\}\mathrm{d}\Omega.$$

经过繁杂的计算得到

$$P_n=\frac{2e^4H^2\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)}{m^2c^2V}\left\{\frac{nV^2}{c^2}\mathrm{J}_{2n}'\left(\frac{2nV}{c}\right)-n^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\int_0^{\frac{V}{c}}\mathrm{J}_{2n}(2n\xi)\mathrm{d}\xi\right\}. \quad (11.24)$$

下面考虑极端相对论的情况, 即当 $\dfrac{V}{c}\to 1$ 时.

对于大 n, 贝塞尔函数有渐进表达式

$$\mathrm{J}_n(n\xi)\approx\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{3}}\Phi\left[\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{2}{3}}(1-\xi^2)\right],$$

其中 $\Phi(t)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^\infty\cos\left(\frac{\xi^3}{3}+t\xi\right)\mathrm{d}\xi$ 是 Airy 函数.

所以对于大 n 可得到

$$P_n=-\frac{2e^4H^2\dfrac{mc^2}{\varepsilon}u^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}m^2c^3}\left\{\Phi'(u)+\frac{u}{2}\int_u^\infty\Phi(x)\mathrm{d}x\right\},$$

其中 $u=n^{\frac{2}{3}}\left(\dfrac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2$, ε 是粒子的能量.

当 u 小时, 即 $1\ll n\ll\left(\dfrac{\varepsilon}{mc^2}\right)^3$, 有

$$\left\{\Phi'(u)+\frac{u}{2}\int_u^\infty\Phi(x)\mathrm{d}x\right\}\rightharpoonup\Phi'(0)\approx -0.4587,$$

可以得到

$$P_n\approx 0.52\frac{e^4H^2}{m^2c^3}\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2 n^{\frac{1}{3}},$$

即总辐射强度随 n 的增加而增大.

当 $u \gg 1$ 时, $n \gg \left(\dfrac{\varepsilon}{mc^2}\right)^3$, 利用 Airy 函数的渐进展开式可得到

$$P_n = \frac{e^4 H^2 \left(\dfrac{mc^2}{\varepsilon}\right)^{\frac{5}{2}} n^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\pi} m^2 c^3} \exp\left\{-\frac{2}{3} n \left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^3\right\},$$

即总辐射强度随 n 的增大而指数下降.

由此可知, 一定存在某一 n 值 $\left(n \sim \left(\dfrac{\varepsilon}{mc^2}\right)^3\right)$, P_n 总辐射强度有极大值.

在此 n 值附近,

$$\omega \sim \omega_H \left(\frac{\varepsilon}{mc^2}\right)^3 = \frac{eH}{mc}\left(\frac{\varepsilon}{mc^2}\right)^2,$$

$$\mathrm{d}P = P_n \mathrm{d}n = P_n \frac{\mathrm{d}\omega}{\omega_H} = \mathrm{d}\omega \frac{\sqrt{3} e^3 H}{2\pi mc^2} F\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right),$$

其中

$$F(\xi) = \xi \int_\xi^\infty K_{\frac{2}{3}}(\xi')\mathrm{d}\xi', \quad \omega_c = \frac{3eH}{2mc}\left(\frac{\varepsilon}{mc^2}\right)^2.$$

$F(\xi)$ 在 $\xi \approx 0.29$ 时达到极大值 (约为 0.9), 然后随 ξ 的增大而缓慢减小.

11.7 辐射场的球面波展开

首先讨论标量场的齐次波动方程

$$\left(\overrightarrow{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \Psi(\overrightarrow{r}, t) = 0$$

的解.

作傅里叶变换

$$\Psi(\overrightarrow{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\overrightarrow{r}, \omega) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi},$$

则有反变换为

$$\Psi(\overrightarrow{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\overrightarrow{r}, t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}t.$$

得到 $\Psi(\overrightarrow{r}, \omega)$ 满足齐次亥姆霍兹方程为

$$(\overrightarrow{\nabla}^2 + k^2)\Psi(\overrightarrow{r}, \omega) = 0,$$

其中$k = \dfrac{\omega}{c}$.

取球坐标,

$$z = r\cos\theta,$$

$$x = r\sin\theta\cos\phi,$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi,$$

则

$$\overrightarrow{\nabla}^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r) - \frac{\overrightarrow{L}^2}{r^2},$$

而 $\overrightarrow{L} = -\mathrm{i}\,\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{\nabla}$ 是角动量算符, 则

$$L_+ = L_x + \mathrm{i}L_y = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathrm{i}\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right),$$

$$L_- = L_x - \mathrm{i}L_y = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathrm{i}\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right),$$

$$L_z = -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\phi}.$$

角动量算符 $\overrightarrow{L}$ 有下列性质

(1) $\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{L} = 0$;

(2) $\overrightarrow{L} \times \overrightarrow{L} = \mathrm{i}\,\overrightarrow{L}$;

(3) $\overrightarrow{L}^2\overrightarrow{L} = \overrightarrow{L}\,\overrightarrow{L}^2$;

(4) $\overrightarrow{\nabla}^2\overrightarrow{L} = \overrightarrow{L}\,\overrightarrow{\nabla}^2$;

(5) $\overrightarrow{L}^2 = -\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)$.

$$\overrightarrow{L}^2\mathrm{Y}_{\ell m}(\theta\phi) = \ell(\ell+1)\mathrm{Y}_{\ell m}(\theta\phi), \quad \ell = 0, 1, 2, \cdots,$$

$$L_z\mathrm{Y}_{\ell m}(\theta\phi) = m\mathrm{Y}_{\ell m}(\theta\phi), \quad m = -\ell, \cdots \ell,$$

其中 $\mathrm{Y}_{\ell m}(\theta\phi)$ 是球谐函数, 它是 $\overrightarrow{L}^2$ 和 L_z 的共同本征函数, 它的性质前面已经讨论过, 且满足

$$L_+\mathrm{Y}_{\ell m} = \sqrt{(\ell - m)(\ell + m + 1)}\mathrm{Y}_{\ell m+1},$$

$$L_-\mathrm{Y}_{\ell m} = \sqrt{(\ell + m)(\ell - m + 1)}\mathrm{Y}_{\ell m-1}.$$

下面讨论齐次标量场亥姆霍兹方程

$$(\overrightarrow{\nabla}^2 + k^2)\,\Psi(\overrightarrow{r}, \omega) = 0 \tag{11.25}$$

的通解.

令 $\Psi(\overrightarrow{r}, \omega) = \sum_{\ell m} f_\ell(r)\mathrm{Y}_{\ell m}(\theta\phi)$　(球谐函数的完备性),

则可得 $f_\ell(r)$ 满足径向方程

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}+\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}+k^2-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right)f_\ell(r)=0.$$

令 $f_\ell(r)=\dfrac{u_\ell(r)}{\sqrt{r}}$, 可得

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}+k^2-\frac{\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2}{r^2}\right)u_\ell(r)=0.$$

记 $x=kr$, 则可得标准的贝塞尔方程

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+1-\frac{\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2}{x^2}\right)u_\ell(x)=0.$$

而 $\mathrm{J}_{\ell+\frac{1}{2}}(x),\mathrm{N}_{\ell+\frac{1}{2}}(x)$ 是此贝塞尔方程的两个线性独立的解, 则径向函数的通解为

$$f_\ell(r)=A_\ell\frac{1}{\sqrt{r}}\mathrm{J}_{\ell+\frac{1}{2}}(kr)+B_\ell\frac{1}{\sqrt{r}}\mathrm{N}_{\ell+\frac{1}{2}}(kr).$$

定义, 球贝塞尔函数

$$\mathrm{j}_\ell(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{J}_{\ell+\frac{1}{2}}(x),$$

诺依曼函数

$$\mathrm{n}_\ell(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{N}_{\ell+\frac{1}{2}}(x),$$

汉克尔函数

$$\mathrm{h}_\ell^1(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}(\mathrm{J}_{\ell+\frac{1}{2}}(x)+\mathrm{i}\mathrm{N}_{\ell+\frac{1}{2}}(x)),$$

$$\mathrm{h}_\ell^2(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}(\mathrm{J}_{\ell+\frac{1}{2}}(x)-\mathrm{i}\mathrm{N}_{\ell+\frac{1}{2}}(x)).$$

这些函数有表达式：

$$\mathrm{j}_\ell(x)=(-x)^\ell\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^\ell\left(\frac{\sin x}{x}\right),$$

$$\mathrm{n}_\ell(x)=-(-x)^\ell\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^\ell\left(\frac{\cos x}{x}\right).$$

为了以后的参考, 下面给出这些函数的几个低阶的显示表达式.

$$\mathrm{j}_0(x) = \frac{\sin x}{x},$$

$$\mathrm{j}_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x},$$

$$\mathrm{j}_2(x) = \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\sin x - \frac{3\cos x}{x^2},$$

$$\mathrm{n}_0(x) = -\frac{\cos x}{x},$$

$$\mathrm{n}_1(x) = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x},$$

$$\mathrm{n}_2(x) = -\left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\cos x - \frac{3\sin x}{x^2},$$

$$\mathrm{h}_0^1(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{\mathrm{i}x},$$

$$\mathrm{h}_1^1(x) = -\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{x}\right).$$

$$\mathrm{h}_2^1(x) = \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\left(1 + \frac{3\mathrm{i}}{x} - \frac{3}{x^2}\right).$$

当 $x \ll 1, \ell$ 时

$$\mathrm{j}_\ell(x) \to \frac{x^\ell}{(2\ell+1)!!}\left(1 - \frac{x^2}{2(2\ell+3)} + \cdots\right),$$

$$\mathrm{n}_\ell(x) \to \frac{(2\ell-1)!!}{x^{(\ell+1)}}\left(1 - \frac{x^2}{2(1-2\ell)} + \cdots\right).$$

当 $x \gg \ell$ 时

$$\mathrm{j}_\ell(x) \to \frac{1}{x}\sin\left(x - \frac{\ell\pi}{2}\right),$$

$$\mathrm{n}_\ell(x) \to -\frac{1}{x}\cos\left(x - \frac{\ell\pi}{2}\right),$$

$$\mathrm{h}_\ell^1(x) \to (-\mathrm{i})^{\ell+1}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x} \quad (\text{出射波}).$$

球贝塞尔函数满足递推关系

$$\frac{2\ell+1}{x}\mathrm{Z}_\ell(x) = \mathrm{Z}_{\ell-1}(x) + \mathrm{Z}_{\ell+1}(x),$$

$$\mathrm{Z}_\ell'(x) = \frac{1}{2\ell+1}(\ell\mathrm{Z}_{\ell-1}(x) - (\ell+1)\mathrm{Z}_{\ell+1}(x)),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x\mathrm{Z}_\ell(x)] = x\mathrm{Z}_{\ell-1}(x) - \ell\mathrm{Z}_\ell(x),$$

其中 $\mathrm{Z}_\ell(x)$ 是函数 $\mathrm{j}_\ell(x)$, $\mathrm{n}_\ell(x)$, $\mathrm{h}_\ell^1(x)$, $\mathrm{h}_\ell^2(x)$ 中的任意一种.

朗斯基行列式

$$W(\mathrm{j}_\ell, \mathrm{n}_\ell) = \frac{1}{\mathrm{i}}W(\mathrm{j}_\ell, \mathrm{h}_\ell^1) = -W(\mathrm{n}_\ell, \mathrm{h}_\ell^1) = \frac{1}{x^2}.$$

齐次亥姆霍兹方程 (11.25) 的通解可以表示为

$$\varPsi(\overrightarrow{r}) = \sum_{\ell m}(A_{\ell m}^1 \mathrm{h}_\ell^1(kr) + A_{\ell m}^2 \mathrm{h}_\ell^2(kr))\mathrm{Y}_{\ell m}(\theta\phi).$$

下面讨论亥姆霍兹方程的格林函数

$$(\overrightarrow{\nabla}^2 + k^2)G(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r'}) = -4\pi\delta(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}). \tag{11.26}$$

借助三维的傅里叶变换可求得格林函数为

$$G(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r'}) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}|}}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}|}, \tag{11.27}$$

它满足在无限远处是出射波的边界条件.

也可以直接验证 $G(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r'}) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}|}}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}|}$ 满足上面的方程式.

令 $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}$, 可得

$$\overrightarrow{\nabla}R = \frac{\overrightarrow{R}}{R}, \quad \overrightarrow{\nabla}\cdot\left(\frac{\overrightarrow{R}}{R}\right) = \frac{2}{R}, \quad \overrightarrow{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\overrightarrow{R}}{R^3}, \quad \overrightarrow{\nabla}^2\left(\frac{1}{R}\right) = -4\pi\delta(\overrightarrow{R}),$$

$$\overrightarrow{\nabla}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}|}}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}|}\right) = \frac{\overrightarrow{\nabla}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}|}}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}|} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}|}\overrightarrow{\nabla}\left(\frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}|}\right),$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\nabla}^2\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}|}}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}|}\right) =& \frac{\overrightarrow{\nabla}^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}|}}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}|} + 2\overrightarrow{\nabla}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}|})\overrightarrow{\nabla}\left(\frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}|}\right)\\ &+ \mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}|}\overrightarrow{\nabla}^2\left(\frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}|}\right),\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\nabla}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}|}) = \mathrm{i}k\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}|}\frac{(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'})}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}|},$$

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\vec{\nabla}^2(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\vec{r}-\vec{r'}|}) = -k^2\frac{\mathrm{e}^{ik|\vec{r}-\vec{r'}|}}{|\vec{r}-\vec{r'}|} + \mathrm{i}k\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\vec{r}-\vec{r'}|}\frac{2}{|\vec{r}-\vec{r'}|^2},$$

$$2\vec{\nabla}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\vec{r}-\vec{r'}|})\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\right) = -\mathrm{i}k\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\vec{r}-\vec{r'}|}\frac{2}{|\vec{r}-\vec{r'}|^2},$$

所以有

$$(\vec{\nabla}^2+k^2)\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\vec{r}-\vec{r'}|}}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\right) = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r'}).$$

对格林函数作分波展开

$$G(\vec{r},\vec{r'}) = \sum \widetilde{g}_\ell(r,r')\mathrm{Y}_{\ell m}(\theta\phi)\mathrm{Y}^*_{\ell m}(\theta'\phi'),$$

则径向格林函数 $\widetilde{g}_\ell(r,r')$ 满足方程

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}+\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}+k^2-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right)\widetilde{g}_\ell(r,r') = -4\pi\frac{\delta(r-r')}{r^2}.$$

此方程满足在原点有限在无穷远处是出射波边界条件的解为

$$\widetilde{g}_\ell(r,r') = 4\pi\mathrm{i}k\mathrm{j}_\ell(kr_<)\mathrm{h}^1_\ell(kr_>),$$

其中 $r_<$ 和 $r_>$ 分别是 r,r' 中的较小和较大者.

因电磁场是矢量场, 下面讨论矢量场 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 满足的齐次亥姆霍兹方程的解.

由齐次的 Mexwell 方程组

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0,\quad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t},\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{H}=0,\quad \vec{\nabla}\times\vec{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},$$

并假定是单色场, 它们含有与时间有关的因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$, 则方程组成为

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0,\quad \vec{\nabla}\times\vec{E}=\mathrm{i}k\vec{H},\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{H}=0,\quad \vec{\nabla}\times\vec{H}=-\mathrm{i}k\vec{E},$$

其中 $k=\dfrac{\omega}{c}$.

由此可得

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = \mathrm{i}k\vec{\nabla}\times\vec{H} = \mathrm{i}k(-\mathrm{i}k\vec{E}) = k^2\vec{E},$$

所以

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \nabla^2\vec{E} = k^2\vec{E}.$$

从而得到矢量场 $\vec{E}$(和 $\vec{H}$) 满足的齐次亥姆霍兹方程为

$$\begin{aligned}(\vec{\nabla}^2+k^2)\vec{E}&=0,\\ (\vec{\nabla}^2+k^2)\vec{H}&=0.\end{aligned}\tag{11.28}$$

对任意矢量 $\vec{a}$ 有恒等式

$$\vec{\nabla}^2(\vec{r}\cdot\vec{a}) = 2\vec{\nabla}\cdot\vec{a} + \vec{r}\cdot\vec{\nabla}^2\vec{a}.$$

恒等式的证明如下：

因为

$$\frac{\partial}{\partial x}(xa_x + ya_y + za_z) = a_x + x\frac{\partial a_x}{\partial x} + y\frac{\partial a_y}{\partial x} + z\frac{\partial a_z}{\partial x},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(xa_x + ya_y + za_z) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(a_x + x\frac{\partial a_x}{\partial x} + y\frac{\partial a_y}{\partial x} + z\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\\ &= 2\frac{\partial a_x}{\partial x} + x\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + z\frac{\partial 2a_z}{\partial x^2},\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}^2(\vec{r}\cdot\vec{a}) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(xa_x + ya_y + za_z)\\ &= 2\vec{\nabla}\cdot\vec{a} + \vec{r}\cdot\vec{\nabla}^2\vec{a}.\end{aligned}$$

利用此恒等式可以得到

$$\vec{\nabla}^2(\vec{r}\cdot\vec{E}) = 2\vec{\nabla}\cdot\vec{E} + \vec{r}\cdot\vec{\nabla}^2\vec{E},$$

$$\vec{\nabla}^2(\vec{r}\cdot\vec{H}) = 2\vec{\nabla}\cdot\vec{H} + \vec{r}\cdot\vec{\nabla}^2\vec{H}.$$

又因为 $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{H} = 0$, 所以

$$\vec{r}\cdot(\vec{\nabla}^2 + k^2)\vec{E} = (\vec{\nabla}^2 + k^2)(\vec{r}\cdot\vec{E}) = 0,$$

$$\vec{r}\cdot(\vec{\nabla}^2 + k^2)\vec{H} = (\vec{\nabla}^2 + k^2)(\vec{r}\cdot\vec{H}) = 0,$$

即 $(\vec{r}\cdot\vec{E})$ 和 $(\vec{r}\cdot\vec{H})$ 满足标量场的齐次亥姆霍兹方程, 它的通解上面已经讨论过.

下面用标量场 $(\vec{r}\cdot\vec{E})$ 和 $(\vec{r}\cdot\vec{H})$ 的齐次亥姆霍兹方程的解来讨论矢量场 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 的解.

(1) 令 $(\vec{r}\cdot\vec{E})_{\ell m} = 0$, 称为 TE 模式 (横电模式),

$$(\vec{r}\cdot\vec{H})_{\ell m} = g_\ell(kr)\mathrm{Y}_{\ell m}(\theta\phi),$$

其中 $g_\ell(kr)$ 是标量场齐次亥姆霍兹方程的径向方程的解.

由 $\vec{H} = -\dfrac{\mathrm{i}}{k}\vec{\nabla}\times\vec{E}$, 则有

$$(\vec{r}\cdot\vec{H}) = -\frac{\mathrm{i}}{k}\vec{r}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -\frac{\mathrm{i}}{k}(\vec{r}\times\vec{\nabla})\cdot\vec{E} = \frac{1}{k}\vec{L}\cdot\vec{E},$$

所以

$$(\vec{L}\cdot\vec{E}_{\ell m})_{\ell m}\propto \mathrm{Y}_{\ell m}.$$

因为 $\vec{L}$ 不改变 $\vec{E}_{\ell m}$ 的径向关系, 而 L_+, L_-, L_0 不改变 ℓ, 要保证

$$(\vec{L}\cdot\vec{E}_{\ell m}) = L_+E^-_{\ell m} + L_-E^+_{\ell m} + L_0E^0_{\ell m}\propto \mathrm{Y}_{\ell m},$$

则必须有

$$E^-_{\ell m}\propto \mathrm{Y}_{\ell m-1},\quad E^+_{\ell m}\propto \mathrm{Y}_{\ell m+1},\quad E^0_{\ell m}\propto \mathrm{Y}_{\ell m},$$

也即 $\vec{E}_{\ell m}\propto\vec{L}\mathrm{Y}_{\ell m}$.

所以对 TE 模式 (横电模式) 得到

$$\vec{E}_{\ell m} = g_\ell(kr)\vec{L}\mathrm{Y}_{\ell m},\quad \vec{H}_{\ell m} = -\frac{\mathrm{i}}{k}\vec{\nabla}\times\vec{E}_{\ell m}.$$

(2) 令 $(\vec{r}\cdot\vec{H})_{\ell m}=0$, 称为 TM 模式 (横磁模式),

$$(\vec{r}\cdot\vec{E})_{\ell m} = f_\ell(kr)\mathrm{Y}_{\ell m},$$

其中 $f_\ell(kr)$ 是标量场齐次亥姆霍兹方程的径向方程的解.

由 $\vec{E}=\dfrac{\mathrm{i}}{k}\vec{\nabla}\times\vec{H}$, 可以得到

$$\vec{r}\cdot\vec{E} = \frac{\mathrm{i}}{k}\vec{r}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H}) = -\frac{1}{k}\vec{L}\cdot\vec{H},$$

所以 $\vec{L}\cdot\vec{H}_{\ell m}\propto\mathrm{Y}_{\ell m}$.

采用与讨论横电模式时类似的论证可得横磁模式的结果为

$$\vec{H}_{\ell m} = f_\ell(kr)\vec{L}\mathrm{Y}_{\ell m},\quad \vec{E}_{m} = \frac{\mathrm{i}}{k}\vec{\nabla}\times\vec{H}_{\ell m}.$$

定义矢量球谐函数 $\vec{X}_{\ell m} = \dfrac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}\vec{L}\mathrm{Y}_{\ell m}$, 则函数 $\vec{X}_{\ell m}$ 有下列性质:

$$\int\vec{X}^*_{\ell m}\cdot\vec{X}_{\ell' m'}\mathrm{d}\Omega = \frac{1}{\ell(\ell+1)}\int\mathrm{Y}^*_{\ell m}\vec{L}^2\mathrm{Y}_{\ell' m'}\mathrm{d}\Omega = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'},$$

$$\int\vec{X}^*_{\ell m}\cdot(\vec{r}\times\vec{X}_{\ell' m'})\mathrm{d}\Omega = \frac{1}{\ell(\ell+1)}\int\mathrm{Y}^*_{\ell m}\vec{L}\cdot(\vec{r}\times\vec{L})\mathrm{Y}_{\ell' m'}\mathrm{d}\Omega = 0.$$

所以矢量场 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 的齐次亥姆霍兹方程的通解可以表示为

$$\vec{H} = \sum_{\ell m}(a_E(\ell m)f_\ell(kr)\vec{X}_{\ell m} - \frac{\mathrm{i}}{k}a_M(\ell m)\vec{\nabla}\times g_\ell(kr)\vec{X}_{\ell m}),$$

$$\vec{E}=\sum_{\ell m}\left(\frac{\mathrm{i}}{k}a_E(\ell m)\vec{\nabla}\times f_\ell(kr)\vec{X}_{\ell m}+a_M(\ell m)g_\ell(kr)\vec{X}_{\ell m}\right),$$

其中 $a_E(\ell m)$ 是横磁模式的展开系数, $a_M(\ell m)$ 是横电模式的展开系数.

当 $r\to\infty$ 时, $f_\ell(kr)$, $g_\ell(kr)\propto\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{kr}$, 满足在无穷远处为出射波的边界条件.

当 $kr\gg 1(r\gg\lambda)$, 即在辐射场的平面波区有

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times g_\ell(kr)\vec{X}_{\ell m}&\overset{kr\gg1}{\to}\vec{\nabla}\times\left((-\mathrm{i})^{\ell+1}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{kr}\vec{X}_{\ell m}\right)\\&=(-\mathrm{i})^{\ell+1}\left(\vec{\nabla}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{kr}\right)\times\vec{X}_{\ell m}+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{kr}\quad\vec{\nabla}\times\vec{X}_{\ell m}\right)\\&=(-\mathrm{i})^{\ell+1}\left(\mathrm{i}k\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{kr}\vec{n}\times\vec{X}_{\ell m}-\frac{1}{r}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{kr}\vec{n}\times\vec{X}_{\ell m}+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{kr}\quad\vec{\nabla}\times\vec{X}_{\ell m}\right)\\&\approx(-\mathrm{i})^{\ell+1}\left(\mathrm{i}k\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{kr}\vec{n}\times\vec{X}_{\ell m}+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{kr}\quad\vec{\nabla}\times\vec{X}_{\ell m}\right).\end{aligned}$$

为了计算第二项, 首先证明恒等式:

$$\mathrm{i}\vec{\nabla}\times\vec{L}=\vec{r}\vec{\nabla}^2-\vec{\nabla}\left(1+r\frac{\partial}{\partial r}\right).$$

证明　令 f 是任意函数, 记 $\vec{A}=\vec{\nabla}f$, 则有

$$\begin{aligned}(\mathrm{i}\vec{\nabla}\times\vec{L})f&=\vec{\nabla}\times(\vec{r}\times\vec{\nabla})f\\&=\vec{\nabla}\times(\vec{r}\times\vec{A})=\vec{\nabla}_r\times(\vec{r}\times\vec{A})+\vec{\nabla}_A\times(\vec{r}\times\vec{A})\\&=(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}_r)\vec{r}-\vec{A}(\vec{\nabla}_r\cdot\vec{r})+\vec{r}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})-(\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}\\&=-2\vec{\nabla}f+\vec{r}\vec{\nabla}^2f-(\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\vec{\nabla}f\\&=-2\vec{\nabla}f+\vec{r}\vec{\nabla}^2f-(\vec{\nabla}(\vec{r}\cdot\vec{\nabla}f)-\vec{\nabla}f)\\&=\left\{\vec{r}\vec{\nabla}^2-\vec{\nabla}\left(1+r\frac{\partial}{\partial r}\right)\right\}f,\end{aligned}$$

所以恒等式成立. 借助此恒等式可得

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\vec{X}_{\ell m}&=\frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}(\vec{\nabla}\times\vec{L})\mathrm{Y}_{\ell m}\\&=-\mathrm{i}\left\{\vec{r}\vec{\nabla}^2-\vec{\nabla}\left(1+r\frac{\partial}{\partial r}\right)\right\}\frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}\mathrm{Y}_{\ell m}\propto\frac{1}{r}=k\frac{1}{kr},\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times g_\ell(kr)\vec{X}_{\ell m}&\approx(-\mathrm{i})^{\ell+1}\left(\mathrm{i}k\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{kr}\vec{n}\times\vec{X}_{\ell m}+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{kr}\vec{\nabla}\times\vec{X}_{\ell m}\right)\\&\approx(-\mathrm{i})^{\ell+1}k\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{kr}\left(\mathrm{i}\vec{n}\times\vec{X}_{\ell m}+\frac{1}{kr}\cdots\right)\approx(-\mathrm{i})^{\ell+1}k\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{kr}(\mathrm{i}\vec{n}\times\vec{X}_{\ell m}).\end{aligned}$$

所以在辐射场的平面波区 ($kr \gg 1$) 可得

$$\overrightarrow{H} \to \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr-\mathrm{i}\omega t}}{kr}\sum_{\ell m}(-\mathrm{i})^{\ell+1}(a_E(\ell m)\overrightarrow{X}_{\ell m} + a_M(\ell m)\overrightarrow{n} \times \overrightarrow{X}_{\ell m}), \tag{11.29}$$

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{H} \times \overrightarrow{n}. \tag{11.30}$$

在立体角 $\mathrm{d}\Omega$ 内的辐射功率在一个周期内的时间平均为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}P &= \frac{c}{8\pi}(\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{H}^*)r^2\mathrm{d}\Omega \\ &= \frac{c}{8\pi k^2 r^2}r^2\mathrm{d}\Omega|\sum_{\ell m}(-\mathrm{i})^{\ell+1}(a_E(\ell m)\overrightarrow{X}_{\ell m} + a_M(\ell m)\overrightarrow{n} \times \overrightarrow{X}_{\ell m})|^2 \\ &= \frac{c}{8\pi k^2}|\sum_{\ell m}(-\mathrm{i})^{\ell+1}(a_E(\ell m)\overrightarrow{X}_{\ell m} + a_M(\ell m)\overrightarrow{n} \times \overrightarrow{X}_{\ell m})|^2\mathrm{d}\Omega.\end{aligned} \tag{11.31}$$

对给定的 $\ell m(\ell \geqslant 1)$,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} \propto |\overrightarrow{L}\mathrm{Y}_{\ell m}|^2 = &\frac{1}{\ell(\ell+1)}\left\{\frac{1}{2}(\ell-m)(\ell+m+1)|\mathrm{Y}_{\ell m+1}|^2\right. \\ &\left.+\frac{1}{2}(\ell+m)(\ell-m+1)|\mathrm{Y}_{\ell m-1}|^2 + m^2|\mathrm{Y}_{\ell m}|^2\right\}.\end{aligned}$$

表 11.1 给出电偶极和电四极辐射场的角分布.

表 11.1 电偶极和电四极辐射场的角分布

m	0	±1	±2
偶极	$\frac{3}{4\pi}\sin^2\theta$	$\frac{3}{8\pi}(\cos^2\theta+1)$	–
四极	$\frac{15}{8\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta$	$\frac{15}{16\pi}(1-3\cos^2\theta+4\cos^4\theta)$	$\frac{15}{16\pi}(1-\cos^4\theta)$

由 $\overrightarrow{X}_{\ell m}$ 的性质可知:
总辐射功率是各个分波的辐射功率之和, 因交叉项的贡献为零, 即

$$P = \frac{c}{8\pi k^2}\sum_{lm}(|a_E(\ell m)|^2 + |a_M(\ell m)|^2).$$

下面讨论 $a_E(\ell m)$ 和 $a_M(\ell m)$ 的计算, 为此必须解非齐次的亥姆霍兹方程.
对于这种情况必须由非齐次的 Mexwell 方程组

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} = 4\pi\rho, \quad \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\overrightarrow{H}}{\partial t}, \quad \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H} = 0, \quad \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\overrightarrow{j}$$

及连续性方程$\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{j}=0$ 出发.

假定 $\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{H}$, $\rho\sim\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$, 则连续性方程为

$$\mathrm{i}\omega\rho=\mathrm{i}ck\rho=\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{j}.$$

定义 $\overrightarrow{E'}=\overrightarrow{E}+\mathrm{i}\dfrac{4\pi}{\omega}\overrightarrow{j}$, 则

$$\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{H}=-\mathrm{i}k\overrightarrow{E}+\frac{4\pi}{c}\overrightarrow{j}=-\mathrm{i}k\left(\overrightarrow{E'}-\mathrm{i}\frac{4\pi}{ck}\overrightarrow{j}\right)+\frac{4\pi}{c}\overrightarrow{j}=-\mathrm{i}k\overrightarrow{E'},$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{E}&=\overrightarrow{\nabla}\cdot\left(\overrightarrow{E'}-\mathrm{i}\frac{4\pi}{\omega}\overrightarrow{j}\right)=\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{E'}-\mathrm{i}\frac{4\pi}{ck}\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{j}\\&=\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{E'}-\mathrm{i}\frac{4\pi}{k}(\mathrm{i}k\rho)=\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{E'}+4\pi\rho=4\pi\rho,\end{aligned}$$

可以得到

$$\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{E'}=0.$$

又由

$$\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{E}=\mathrm{i}k\overrightarrow{H}$$

得到

$$\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{E'}=\mathrm{i}k\overrightarrow{H}+\mathrm{i}\frac{4\pi}{ck}\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{j},$$

所以 $\overrightarrow{H}$, $\overrightarrow{E'}$ 满足如下方程组：

$$\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{H}=-\mathrm{i}k\overrightarrow{E'},\quad\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{H}=0,\quad\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{E'}=\mathrm{i}k\overrightarrow{H}+\mathrm{i}\frac{4\pi}{\omega}\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{j},\quad\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{E'}=0.$$

由

$$\overrightarrow{\nabla}\times(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{H})=-\mathrm{i}k\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{E'}=-\mathrm{i}k\left(\mathrm{i}k\overrightarrow{H}+\mathrm{i}\frac{4\pi}{ck}\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{j}\right)=k^2\overrightarrow{H}+\frac{4\pi}{c}\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{j},$$

得到

$$(\overrightarrow{\nabla}^2+k^2)\overrightarrow{H}=-\frac{4\pi}{c}\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{j},\quad\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{H}=0.$$

又由

$$\overrightarrow{\nabla}\times(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{E'})=\overrightarrow{\nabla}\times\left(\mathrm{i}k\overrightarrow{H}+\mathrm{i}\frac{4\pi}{\omega}\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{j}\right)=\mathrm{i}k(-\mathrm{i}k\overrightarrow{E'})+\mathrm{i}\frac{4\pi}{ck}\overrightarrow{\nabla}\times(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{j}),$$

得到

$$(\overrightarrow{\nabla}^2+k^2)\overrightarrow{E'}=-\mathrm{i}\frac{4\pi}{ck}\overrightarrow{\nabla}\times(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{j}),\quad\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{E'}=0.$$

利用恒等式

$$\vec{\nabla}^2(\vec{r}\cdot\vec{A}) = \vec{r}\cdot(\vec{\nabla}^2\vec{A}) + 2\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$$

和

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E'} = 0, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{H} = 0,$$

最终得到

$$(\vec{\nabla}^2 + k^2)(\vec{r}\cdot\vec{H}) = -\mathrm{i}\frac{4\pi}{c}(\vec{r}\times(-\mathrm{i}\vec{\nabla}))\cdot\vec{j} = -\mathrm{i}\frac{4\pi}{c}\vec{L}\cdot\vec{j},$$

$$(\vec{\nabla}^2 + k^2)(\vec{r}\cdot\vec{E'}) = \vec{r}\cdot\left(-\mathrm{i}\frac{4\pi}{ck}\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{j})\right) = \frac{4\pi}{ck}\vec{L}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{j}),$$

其中 $\vec{L}$ 是上面定义的角动量算符.

下面讨论标量场 $(\vec{r}\cdot\vec{E'})$ 和 $(\vec{r}\cdot\vec{H})$ 满足的非齐次亥姆霍兹方程

$$\begin{aligned}(\vec{\nabla}^2 + k^2)(\vec{r}\cdot\vec{E'}) &= -4\pi\left(-\frac{1}{ck}\vec{L}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{j})\right), \\ (\vec{\nabla}^2 + k^2)(\vec{r}\cdot\vec{H}) &= -4\pi\frac{\mathrm{i}}{c}\vec{L}\cdot\vec{j}\end{aligned} \tag{11.32}$$

的解.

利用格林函数 $G(\vec{r},\vec{r'}) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\vec{r}-\vec{r'}|}}{|\vec{r}-\vec{r'}|}$, 方程 (11.32) 的特解分别可以表示为

$$(\vec{r}\cdot\vec{H}) = \frac{\mathrm{i}}{c}\int G(\vec{r},\vec{r'})\vec{L}'\cdot\vec{j}'\mathrm{d}\vec{r}',$$

$$(\vec{r}\cdot\vec{E'}) = -\frac{1}{ck}\int G(\vec{r},\vec{r'})\vec{L}'\cdot(\vec{\nabla}'\times\vec{j}')\mathrm{d}\vec{r}'.$$

下面给出证明的主要步骤

由

$$(\vec{\nabla}'^2 + k^2)(\vec{r}'\cdot\vec{H}') = -\mathrm{i}\frac{4\pi}{c}\vec{L}'\cdot\vec{j}',$$

可得

$$\int G(\vec{r},\vec{r'})(\vec{\nabla}'^2 + k^2)(\vec{r}'\cdot\vec{H}')\mathrm{d}\vec{r}' = -\mathrm{i}\frac{4\pi}{c}\int G(\vec{r},\vec{r'})\vec{L}'\cdot\vec{j}'\mathrm{d}\vec{r}',$$

对等式左边用分部积分可得

$$\int[(\vec{\nabla}'^2 + k^2)G(\vec{r},\vec{r'})](\vec{r}'\cdot\vec{H}')\mathrm{d}\vec{r}' = -\mathrm{i}\frac{4\pi}{c}\int G(\vec{r},\vec{r'})\vec{L}'\cdot\vec{j}'\mathrm{d}\vec{r}',$$

即

$$\int[-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r'})](\vec{r}'\cdot\vec{H}')\mathrm{d}\vec{r}' = -\mathrm{i}\frac{4\pi}{c}\int G(\vec{r},\vec{r'})\vec{L}'\cdot\vec{j}'\mathrm{d}\vec{r}',$$

所以

$$(\vec{r}\cdot\vec{H})=\mathrm{i}\frac{1}{c}\int G(\vec{r},\vec{r'})\vec{L}'\cdot\vec{j}'\mathrm{d}\vec{r}'.$$

利用同样的论证可得

$$(\vec{r}\cdot\vec{E'})=-\frac{1}{ck}\int G(\vec{r},\vec{r'})\vec{L}'\cdot(\vec{\nabla}'\times\vec{j}')\mathrm{d}\vec{r}'.$$

将 $\vec{H}$ 和 $\vec{E}'$ 用完备基展开

$$\vec{H}=\sum_{\ell m}(a_E(\ell m)f_\ell(kr)\vec{X}_{\ell m}-\frac{\mathrm{i}}{k}a_M(\ell m)\vec{\nabla}\times g_\ell(kr)\vec{X}_{\ell m}),$$

$$\vec{E}'=\sum_{\ell m}\left(\frac{\mathrm{i}}{k}a_E(\ell m)\vec{\nabla}\times f_\ell(kr)\vec{X}_{\ell m}+a_M(\ell m)g_\ell(kr)\vec{X}_{\ell m}\right).$$

有

$$\begin{aligned}(\vec{r}\cdot\vec{H})&=\sum_{\ell m}\vec{r}\cdot\left\{-\frac{\mathrm{i}}{k}a_M(\ell m)\vec{\nabla}\times g_\ell(kr)\vec{X}_{\ell m}\right\}\\&=\sum_{\ell m}\frac{1}{k}a_M(\ell m)[\vec{r}\times(-\mathrm{i}\vec{\nabla})]\cdot g_\ell(kr)\vec{X}_{\ell m}=\sum_{\ell m}\frac{1}{k}a_M(\ell m)\vec{L}\cdot g_\ell(kr)\vec{X}_{\ell m}\\&=\sum_{\ell m}\frac{1}{k\sqrt{\ell(\ell+1)}}a_M(\ell m)\vec{L}^2g_\ell(kr)\mathrm{Y}_{\ell m}=\sum_{\ell m}\frac{\sqrt{\ell(\ell+1)}}{k}a_M(\ell m)g_\ell(kr)\mathrm{Y}_{\ell m}.\end{aligned}$$

利用球谐函数 $\mathrm{Y}_{\ell m}$ 的正交归一性得到

$$a_M(\ell m)g_\ell(kr)=\frac{k}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}\int\mathrm{Y}^*_{\ell m}(\vec{r}\cdot\vec{H})\mathrm{d}\Omega.$$

同理可得

$$a_E(\ell m)f_\ell(kr)=-\frac{k}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}\int\mathrm{Y}^*_{\ell m}(\vec{r}\cdot\vec{E}')\mathrm{d}\Omega.$$

当 $r\to\infty$ 时, 边界条件是向外传播的球面波要求

$$g_\ell(kr)=f_\ell(kr)=\mathrm{h}^1_\ell(kr).$$

利用格林函数的分波展开

$$G(\vec{r},\vec{r'})=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\vec{r}-\vec{r'}|}}{|\vec{r}-\vec{r'}|}=4\pi\mathrm{i}k\sum_{\ell m}\mathrm{j}_\ell(kr_<)\mathrm{h}^1_\ell(kr_>)\mathrm{Y}^*_{\ell m}(\theta',\phi')\mathrm{Y}_{\ell m}(\theta,\phi),$$

其中 $r_< = r'$, $r_> = r$(观测点), 所以有

$$
\begin{aligned}
a_M(\ell m)\mathrm{h}_\ell^1(kr) &= \frac{k}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}\int \mathrm{Y}_{\ell m}^*(\theta,\phi)(\vec{r}\cdot\vec{H})\mathrm{d}\Omega \\
&= \frac{k}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}\int \mathrm{Y}_{\ell m}^*(\theta,\phi)\left\{\frac{\mathrm{i}}{c}\int G(\vec{r},\vec{r'})\vec{L}'\cdot\vec{j}'\mathrm{d}\vec{r}'\right\}\mathrm{d}\Omega \\
&= \frac{k}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}\int \mathrm{Y}_{\ell m}^*(\theta,\phi) \\
&\quad \left\{\frac{\mathrm{i}}{c}\int\left\{4\pi\mathrm{i}k\sum_{\ell m}\mathrm{j}_\ell(kr')\mathrm{h}_\ell^1(kr)\mathrm{Y}_{\ell m}^*(\theta',\phi')\mathrm{Y}_{\ell m}(\theta,\phi)\right\}\vec{L}'\cdot\vec{j}'\mathrm{d}\vec{r}'\right\}\mathrm{d}\Omega \\
&= \mathrm{h}_\ell^1(kr)\frac{-4\pi k^2}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}\frac{1}{c}\int \mathrm{j}_\ell(kr')\mathrm{Y}_{\ell m}^*(\theta',\phi')\vec{L}'\cdot\vec{j}'\mathrm{d}\vec{r}'.
\end{aligned}
$$

最终可得

$$
a_M(\ell m) = \frac{-4\pi k^2}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}\frac{1}{c}\int \mathrm{j}_\ell(kr)\mathrm{Y}_{\ell m}^*(\theta,\phi)\vec{L}\cdot\vec{j}\,\mathrm{d}\vec{r}.
$$

又由

$$
\begin{aligned}
&a_E(\ell m)f_\ell(kr) \\
=&-\frac{k}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}\int \mathrm{Y}_{\ell m}^*(\theta,\phi)(\vec{r}\cdot\vec{E}')\mathrm{d}\Omega \\
=&-\frac{k}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}\int \mathrm{d}\Omega\mathrm{Y}_{\ell m}^*(\theta,\phi)\left[-\frac{1}{ck}\int G(\vec{r},\vec{r'})\vec{L}'\cdot(\vec{\nabla}'\times\vec{j}')\mathrm{d}\vec{r}'\right] \\
=&-\frac{k}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}\int \mathrm{d}\Omega\mathrm{Y}_{\ell m}^*(\theta,\phi) \\
&\left[-\frac{1}{ck}\int\left\{4\pi\mathrm{i}k\sum_{\ell m}\mathrm{j}_\ell(kr')\mathrm{h}_\ell^1(kr)\mathrm{Y}_{\ell m}^*(\theta',\phi')\mathrm{Y}_{\ell m}(\theta,\phi)\right\}\vec{L}'\cdot(\vec{\nabla}'\times\vec{j}')\mathrm{d}\vec{r}'\right] \\
=&\mathrm{h}_\ell^1(kr)\frac{4\pi\mathrm{i}k}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}\frac{1}{c}\int \mathrm{j}_\ell(kr')\mathrm{Y}_{\ell m}^*(\theta',\phi')\vec{L}'\cdot(\vec{\nabla}'\times\vec{j}')\mathrm{d}\vec{r}',
\end{aligned}
$$

得到

$$
\begin{aligned}
a_E(\ell m) &= \frac{4\pi\mathrm{i}k}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}\int \mathrm{j}_\ell(kr')\mathrm{Y}_{\ell m}^*(\theta',\phi')\vec{L}'\cdot(\vec{\nabla}'\times\vec{j}')\mathrm{d}\vec{r}' \\
&= \frac{4\pi\mathrm{i}k}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}\frac{1}{c}\int \mathrm{j}_\ell(kr)\mathrm{Y}_{\ell m}^*(\theta,\phi)\vec{L}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{j})\mathrm{d}\vec{r}.
\end{aligned}
$$

因为

$$
\begin{aligned}
\vec{L}\cdot\vec{j} &= \vec{r}\times(-\mathrm{i}\vec{\nabla})\cdot\vec{j} = \mathrm{i}\vec{\nabla}\cdot(\vec{r}\times\vec{j}) = \mathrm{i}\{\vec{\nabla}_r\cdot(\vec{r}\times\vec{j}) + \vec{\nabla}_j\cdot(\vec{r}\times\vec{j})\} \\
&= \mathrm{i}\{(\vec{\nabla}_r\times\vec{r})\cdot\vec{j} - \vec{r}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{j})\} = -\mathrm{i}(\vec{r}\times\vec{\nabla})\cdot\vec{j}.
\end{aligned}
$$

利用上式, 则有

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{L}\cdot(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{j}) &= -\mathrm{i}(\overrightarrow{r}\times\overrightarrow{\nabla})\cdot(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{j})\\
&= -\mathrm{i}((\overrightarrow{r}\times\overrightarrow{\nabla})\times\overrightarrow{\nabla})\cdot\overrightarrow{j} = -\mathrm{i}\{(\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{\nabla}-\overrightarrow{r}\overrightarrow{\nabla}^2\}\cdot\overrightarrow{j}\\
&= -\mathrm{i}\left\{r\frac{\partial}{\partial r}(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{j})-\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{\nabla}^2\overrightarrow{j}\right\}\\
&= -\mathrm{i}\left\{r\frac{\partial}{\partial r}(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{j})-\overrightarrow{\nabla}^2(\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{j})+2\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{j}\right\}\\
&= \mathrm{i}\overrightarrow{\nabla}^2(\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{j})-\mathrm{i}\frac{\partial}{r\partial r}(r^2\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{j}) = \mathrm{i}\overrightarrow{\nabla}^2(\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{j})+\frac{ck}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\rho),
\end{aligned}
$$

其中利用了连续性方程 $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{j}+\dfrac{\partial\rho}{\partial t}=0$ 及 $\rho\sim\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$, $\omega=ck$. 则可得到

$$
a_E(\ell m)=\frac{4\pi\mathrm{i}k}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}\frac{1}{c}\int \mathrm{j}_\ell(kr)\mathrm{Y}^*_{\ell m}(\theta,\phi)(\mathrm{i}\overrightarrow{\nabla}^2(\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{j})+\frac{ck}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\rho))\mathrm{d}\overrightarrow{r}.
$$

对第一项用格林定理

$$
\int_V(\phi\overrightarrow{\nabla}^2\psi-\psi\overrightarrow{\nabla}^2\phi)\mathrm{d}\overrightarrow{r}=\oint_S\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)\mathrm{d}s,
$$

令 $\phi=\mathrm{j}_\ell(kr)\mathrm{Y}^*_{\ell m}(\theta,\phi)$, 则有

$$
\overrightarrow{\nabla}^2\phi=-k^2\phi,
$$

令 $\psi=i(\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{j})$, 因 $\overrightarrow{j}$ 在有限体积内, 所以给出面积分为零.

由此可得

$$
\int \mathrm{j}_\ell(kr)\mathrm{Y}^*_{\ell m}(\theta,\phi)(\mathrm{i}\overrightarrow{\nabla}^2(\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{j})\mathrm{d}\overrightarrow{r}=-\mathrm{i}k^2\int \mathrm{Y}^*_{\ell m}(\theta,\phi)\mathrm{j}_\ell(kr)(\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{j})\mathrm{d}\overrightarrow{r}.
$$

对第二项用分部积分, 最终得到

$$
a_E(\ell m)=\frac{4\pi\mathrm{i}k^2}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}\int \mathrm{Y}^*_{\ell m}(\theta,\phi)\left\{-\frac{\mathrm{i}}{c}kj_\ell(kr)(\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{j})-\rho\frac{\partial}{\partial r}(r\mathrm{j}_\ell(kr))\right\}\mathrm{d}\overrightarrow{r}, \quad (11.33)
$$

$$
a_M(\ell m)=\frac{-4\pi\mathrm{i}k^2}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}\frac{1}{c}\int \mathrm{Y}^*_{\ell m}(\theta,\phi)\{\overrightarrow{\nabla}\cdot(\overrightarrow{r}\times\overrightarrow{j})\mathrm{j}_\ell(kr)\}\mathrm{d}\overrightarrow{r}. \quad (11.34)
$$

在讨论原子和原子核中带电粒子的辐射时可用公式

$$
\mathrm{j}_\ell(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\left(\Gamma n+\ell+\dfrac{3}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\ell}=\frac{x^\ell}{(2\ell+1)!!}\left(1-\frac{x^2}{2(2\ell+3)}+\cdots\right).
$$

对于原子的辐射, $ka \sim \dfrac{Z}{137}$, 这里 a 是原子半径; 对原子核的辐射, $kR \sim 10^{-4} \sim 10^{-1}$, 这里 R 是原子核半径. 所以它们都满足条件 $kr \ll 1$. 在此条件之下,

$$\frac{\mathrm{i}}{c}k\mathrm{j}_\ell(kr)(\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{j}) \approx \frac{V}{c}(kr)^{\ell+1}\rho, \quad \rho\frac{\partial}{\partial r}(r\mathrm{j}_\ell(kr)) \approx (kr)^\ell\rho.$$

于是得到

$$a_E(\ell m) = \frac{4\pi k^{\ell+2}}{\mathrm{i}(2\ell+1)!!}\left(\frac{\ell+1}{\ell}\right)^{\frac{1}{2}} Q_{\ell m}, \tag{11.35}$$

$$Q_{\ell m} = \int \rho r^\ell \mathrm{Y}^*_{\ell m}\mathrm{d}^3x, \tag{11.36}$$

$$a_M(\ell m) = \frac{4\pi\mathrm{i}k^{\ell+2}}{(2\ell+1)!!}\left(\frac{\ell+1}{\ell}\right)^{\frac{1}{2}} M_{\ell m}, \tag{11.37}$$

$$M_{\ell m} = -\frac{1}{\ell+1}\int r^\ell \mathrm{Y}^*_{\ell m}\overrightarrow{\nabla}\cdot(\overrightarrow{r}\times\overrightarrow{j})\mathrm{d}^3x. \tag{11.38}$$

11.8 辐射阻尼和谱线的自然宽度

在第 10 章我们对延迟势作了如下近似

$$\phi(\overrightarrow{r},t) = \int\frac{\rho\left(\overrightarrow{r'},t-\dfrac{R}{c}\right)}{R}\mathrm{d}\overrightarrow{r'} \approx \int\frac{\rho(\overrightarrow{r'},t)}{R}\mathrm{d}\overrightarrow{r'} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}\int\frac{\rho(\overrightarrow{r'},t)}{R}R^2\mathrm{d}\overrightarrow{r'},$$

$$\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r},t) \approx \int\frac{\overrightarrow{j}(\overrightarrow{r'},t)}{cR}\mathrm{d}\overrightarrow{r'},$$

得到了带电粒子系统的位势是瞬时的但与带电粒子的速度有关.

如果在 ϕ 和 $\overrightarrow{A}$ 的展开式中保留更高阶的项, 则下一高价项为

$$\phi^{(3)} = -\frac{1}{6c^3}\frac{\partial^3}{\partial t^3}\int\rho R^2\mathrm{d}\overrightarrow{r}',$$

$$\overrightarrow{A}^{(2)} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int\overrightarrow{j}\,\mathrm{d}\overrightarrow{r}'.$$

作规范变换

$$\phi^{(3)\prime} = \phi^{(3)} - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}, \quad \overrightarrow{A}^{(2)\prime} = \overrightarrow{A}^{(2)} + \overrightarrow{\nabla}f,$$

并取 $f=-\dfrac{1}{6c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\int\rho R^2\mathrm{d}\vec{r}'$, 则有

$$\phi^{(3)'}=0,$$

$$\begin{aligned}\vec{A}^{(2)'}&=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int\vec{j}\,\mathrm{d}\vec{r}'-\frac{1}{6c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\nabla}\int\rho R^2\mathrm{d}\vec{r}'\\&=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int\vec{j}\,\mathrm{d}\vec{r}'-\frac{1}{3c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\rho\vec{R}\mathrm{d}\vec{r}'.\end{aligned}$$

当 $\rho=\sum e\delta(\vec{r}-\vec{r}_0(t))$ 和 $\vec{j}=\sum e\vec{V}\delta(\vec{r}-\vec{r}_0(t))$ 时, 有

$$\vec{A}^{(2)'}=-\frac{2}{3c^2}\sum e\dot{\vec{V}},$$

由此得到

$$\vec{H}^{(2)'}=0,$$

$$\vec{E}^{(2)'}=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}^{(2)'}=\sum\frac{2e}{3c^3}\ddot{\vec{V}}=\frac{2}{3c^3}\dddot{\vec{d}},$$

其中 $\vec{d}$ 是带电粒子系统的电偶极矩.

电场 $\vec{E}^{(2)'}$ 作用于每一个电荷 e 上的力为 $\vec{f}=e\vec{E}^{(2)'}=\dfrac{2e}{3c^3}\dddot{\vec{d}}$, 此力在单位时间内对该带电粒子做功为 $\vec{f}\cdot\vec{V}$, 所以在单位时间内对带电粒子系统做的总功为

$$\sum\vec{f}\cdot\vec{V}=\frac{2}{3c^3}\vec{f}\cdot\sum e\vec{V}=\frac{2}{3c^3}\dddot{\vec{d}}\cdot\dot{\vec{d}}=\frac{2}{3c^3}\frac{d}{dt}(\dot{\vec{d}}\cdot\ddot{\vec{d}})-\frac{2}{3c^3}(\ddot{\vec{d}})^2,$$

取时间平均得 $\overline{\sum\vec{f}\cdot\vec{V}}=-\overline{\dfrac{2}{3c^3}(\ddot{\vec{d}})^2}$, 右端是非相对论带电粒子系统的平均辐射功率的负值, 所以力 $\vec{f}$ 称辐射阻尼力或洛伦兹摩擦力.

对于一个电荷为 e 在外场中运动的粒子, 因自身的辐射而受到的阻尼力为 $\vec{f}=\dfrac{2e^2}{3c^3}\ddot{\vec{V}}$.

在经典理论中, 原子中的电子以特征频率 ω_0 做简谐振动, 考虑辐射修正后电子的运动方程为 $\ddot{\vec{r}}+\omega_0^2\vec{r}-\dfrac{\vec{f}}{m}=0$, 因最后一项是小量, 则可作近似 $\ddot{\vec{V}}=-\omega_0^2\vec{V}$, 即

$$\vec{f}\approx-\frac{2e^2\omega_0^2}{3c^3}\vec{V}.$$

所以有方程 $\ddot{\vec{r}}+\gamma\dot{\vec{r}}+\omega_0^2\vec{r}=0$, 这里 $\gamma=\dfrac{2e^2\omega_0^2}{3mc^3}$.

假定方程的解有形式 $\vec{r}=\vec{r}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$, 可得 $\omega=\omega_0-\dfrac{\mathrm{i}}{2}\gamma$.

辐射场对 t 的依赖关系为

$$\overrightarrow{E}(t)=\overrightarrow{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}=\overrightarrow{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t}(t>0),$$

则可得

$$\overrightarrow{E}(\omega)\propto\frac{1}{\omega-\omega_0-\dfrac{\mathrm{i}}{2}\gamma},$$

所以辐射强度的谱有形式

$$I_\omega\propto\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2+\dfrac{\gamma^2}{4}},$$

γ 称谱线的自然宽度.

11.9 例 题

例题 11.1 由辐射功率的角分布

$$\mathrm{d}P=\frac{1}{4\pi c^3}\{(\ddot{\overrightarrow{d}}\times\overrightarrow{n}+\frac{1}{6c}\dddot{\overrightarrow{D}}\times\overrightarrow{n}+(\ddot{\overrightarrow{m}}\times\overrightarrow{n})\times\overrightarrow{n})_{t'=t-\frac{r}{c}}\}^2\mathrm{d}\Omega$$

导出总辐射功率的表达式

$$P=\frac{2}{3c^3}(\ddot{\overrightarrow{d}})^2+\frac{2}{3c^3}(\ddot{\overrightarrow{m}})^2+\frac{1}{180c^5}(\dddot{D})_{\alpha\beta}.$$

解 首先证明交叉项贡献为零. 因为

$$\int\mathrm{d}\Omega\{n_\alpha\cdots\}_{\mathrm{odd}}=0.$$

电偶极项含一个 n_α, 磁偶极项含两个 n_α, 电四极项含两个 n_α, 所以电偶极与磁偶极和电四极的交叉项的贡献为零.

下面讨论磁偶极与电四极的交叉项

$$\begin{aligned}&(\dddot{\overrightarrow{D}}\times\overrightarrow{n})\cdot((\ddot{\overrightarrow{m}}\times\overrightarrow{n})\times\overrightarrow{n}))\\=&\dddot{\overrightarrow{D}}\cdot(\overrightarrow{n}\times((\ddot{\overrightarrow{m}}\times\overrightarrow{n})\times\overrightarrow{n}))\\=&\dddot{\overrightarrow{D}}\cdot(\ddot{\overrightarrow{m}}\times\overrightarrow{n})=\dddot{D}_{\alpha\beta}n_\beta\epsilon_{\delta\gamma\alpha}m_\delta n_\gamma,\end{aligned}$$

如果 $\beta\neq\gamma$, 则 $\overline{n_\gamma n_\beta}=0$, 如果 $\beta=\gamma$, 则 $\dddot{D}_{\alpha\beta}n_\beta n_\beta\epsilon_{\delta\beta\alpha}m_\delta=0$, 这是因为 $\dddot{D}$ 关于 α, β 对称而 $\epsilon_{\delta\beta\alpha}$ 关于 α,β 反对称. 即磁偶极与电四极的交叉项的贡献也为零.

电偶极的平方项：

$$
\begin{aligned}
(\ddot{\vec{d}} \times \vec{n})^2 &= (\ddot{\vec{d}} \times \vec{n}) \cdot (\ddot{\vec{d}} \times \vec{n}) = \ddot{\vec{d}} \cdot (\vec{n} \times (\ddot{\vec{d}} \times \vec{n}) \\
&= \ddot{\vec{d}} \cdot ((\ddot{\vec{d}} - \vec{n}(\ddot{\vec{d}} \cdot \vec{n})) = (\ddot{\vec{d}})^2 - (\ddot{\vec{d}} \cdot \vec{n})^2 = (\ddot{\vec{d}})^2 - \ddot{d}_\alpha \ddot{d}_\beta n_\alpha n_\beta.
\end{aligned}
$$

磁偶极的平方项：

$$
\begin{aligned}
\{(\ddot{\vec{m}} \times \vec{n}) \times \vec{n})\}^2 &= \{\ddot{\vec{m}} - (\ddot{\vec{m}} \cdot \cdot \vec{n})\vec{n}\}^2 \\
&= (\ddot{\vec{m}})^2 - \ddot{m}_\alpha \ddot{m}_\beta n_\alpha n_\beta.
\end{aligned}
$$

电四极的平方项：

$$
\begin{aligned}
((\dddot{\vec{D}} \times \vec{n})^2 =& (\dddot{\vec{D}})^2 - (\dddot{\vec{D}} \cdot \vec{n})^2 \\
=& (\dddot{D})_\alpha (\dddot{D})_\alpha - (\dddot{D})_\alpha (\dddot{D})_\beta n_\alpha n_\beta \\
=& \dddot{D}_{\alpha\mu} \dddot{D}_{\alpha\nu} n_\mu n_\nu - \dddot{D}_{\alpha\mu} \dddot{D}_{\beta\nu} n_\alpha n_\beta n_\mu n_\nu.
\end{aligned}
$$

因 $n_\mu n_\nu$ 是二阶张量, 它对 μ,ν 是对称的, 在适当的参照系中它是对角的, 即 $n_\mu n_\nu = a\delta_{\mu\nu}$, 两边求迹得$a = \dfrac{1}{3}$. 所以 $\overline{n_\mu n_\nu} = \dfrac{1}{4\pi}\int n_\mu n_\nu \mathrm{d}\Omega = \dfrac{1}{3}\delta_{\mu\nu}$. $n_\alpha n_\beta n_\mu n_\nu$ 对所有指标是对称的, 即在适当的参照系中有

$$
n_\alpha n_\beta n_\mu n_\nu = b(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu} + \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} + \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}),
$$

令 $\alpha = \beta$ 并对 α 求和左边 $=n_\mu n_\nu$, 右边 $=b(3\delta_{\mu\nu} + \delta_{\mu\nu} + \delta_{\mu\nu}) = 5b\delta_{\mu\nu}$. 则可得 $5b = a$, $b = \dfrac{1}{15}$.

$$
\frac{1}{4\pi}\int (\ddot{\vec{d}} \times \vec{n})^2 \mathrm{d}\Omega = (\ddot{\vec{d}})^2 - \frac{1}{3}(\ddot{\vec{d}})^2 = \frac{2}{3}(\ddot{\vec{d}})^2,
$$

$$
\frac{1}{4\pi}\int \{(\ddot{\vec{m}} \times \vec{n}) \times \vec{n})\}^2 \mathrm{d}\Omega = (\ddot{\vec{m}})^2 - \frac{1}{3}(\ddot{\vec{m}})^2 = \frac{2}{3}(\ddot{\vec{m}})^2,
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi}\int ((\dddot{\vec{D}} \times \vec{n})^2 \mathrm{d}\Omega \\
=& \dddot{D}_{\alpha\mu}\dddot{D}_{\alpha\nu}\frac{1}{3}\delta_{\mu\nu} - \dddot{D}_{\alpha\mu}\dddot{D}_{\beta\nu}\frac{1}{15}(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu} + \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} + \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}) \\
=& \frac{1}{3}\dddot{D}^2_{\alpha\mu} - \frac{1}{15}(\dddot{D}^2_{\alpha\mu} + \dddot{D}_{\alpha\alpha}\dddot{D}_{\beta\beta} + \dddot{D}_{\alpha\mu}\dddot{D}_{\mu\alpha}) \\
=& \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{15}\right)\dddot{D}^2_{\alpha\mu} = \frac{1}{5}\dddot{D}.
\end{aligned}
$$

其中利用了四极矩是无迹的, 即 $\dddot{D}_{\alpha\alpha}=0$.

最后得到

$$P=\frac{2}{3c^3}(\ddot{\vec{d}})^2+\frac{2}{3c^3}(\ddot{\vec{m}})^2+\frac{1}{180c^5}\dddot{D}^2_{\alpha\mu}.$$

例题 11.2 有两个电荷为 e 质量为 m 的非相对论全同带电粒子发生碰撞, 求它们碰撞时的辐射功率.

解 两个全同粒子体系的电偶极矩有关系

$$\ddot{\vec{d}}=\frac{e}{m}\dot{\vec{P}},$$

磁偶极矩有关系

$$\ddot{\vec{m}}=\frac{e}{2mc}\ddot{\vec{M}},$$

因为体系的总动量 $\vec{P}$ 和总角动量 $\vec{M}$ 守恒, 所以无电偶极和磁偶极辐射.

下面讨论电四极辐射.

在质心系

$$\vec{r}_1=\frac{1}{2}\vec{r},\quad \vec{r}_2=-\frac{1}{2}\vec{r},$$

$$D_{\alpha\beta}=\sum_{i=1,2}e(3x_\alpha(i)x_\beta(i)-r_i^2\delta_{\alpha\beta})=\frac{1}{2}e(3x_\alpha x_\beta-r^2\delta_{\alpha\beta}),$$

辐射功率

$$P=\frac{1}{180c^5}(\dddot{D}_{\alpha\beta})^2,$$

这里 x 是相对坐标.

由运动方程 $m\ddot{\vec{r}}=\dfrac{2e^2\vec{r}}{r^3}$, 可得

$$\dot{x}_\alpha=V_\alpha,\quad \ddot{x}_\alpha=\frac{2e^2x_\alpha}{mr^3},\quad \dddot{x}_\alpha=\frac{2e^2(rV_\alpha-3x_\alpha V_r)}{mr^4},$$

$$\dddot{D}_{\alpha\beta}=\frac{2e^3}{m}\left\{3\left(\frac{2(x_\alpha V_\beta+V_\alpha x_\beta)}{r^3}-\frac{3x_\alpha x_\beta V_r}{r^4}\right)-\frac{V_r}{r^2}\delta_{\alpha\beta}\right\},$$

计算得到辐射功率为

$$P=\frac{2e^6}{15m^2c^5}\frac{1}{r^4}(V^2+11V_\phi^2),$$

其中$V_\phi=\dfrac{bV_0}{r}$, $V^2=V_0^2-\dfrac{4e^2}{mr}$, V_0 是两粒子相离无限远时的相对速度.

例题 11.3 讨论原子核的 β 衰变过程中的电磁辐射.

解 β 衰变

$$A(N,Z)\to A(N-1,Z+1)+e^-+\overline{\nu}_e.$$

此时有 $\overrightarrow{V}_1=0$, $\overrightarrow{V}_2=\overrightarrow{V}$, 这里 $\overrightarrow{V}$ 是衰变出的电子的速度.

取 z 轴沿 $\overrightarrow{V}$ 的方向, 则 $\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{n}=\cos\theta$, 且

$$\mathrm{d}\varepsilon_\omega=\mathrm{d}\omega\frac{e^2V^2}{4\pi^2c^3}\int\frac{\sin^2\theta}{\left(1-\dfrac{V}{c}\cos\theta\right)^2}2\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{e^2}{\pi c}\left(\frac{c}{V}\ln\frac{c+V}{c-V}-2\right)\mathrm{d}\omega$$

是频率在 ω 与 $\omega+d\omega$ 辐射能.

总辐射能与 β 粒子能量之比为

$$\frac{\varepsilon_{\mathrm{rad}}}{E}=\frac{2}{\pi}\frac{e^2}{\hbar c}\left[\ln\frac{2E}{mc^2}-1\right].$$

对非相对论近似 $\dfrac{V}{c}\ll 1$,

$$\ln\frac{1+\dfrac{V}{c}}{1-\dfrac{V}{c}}\approx 2\frac{V}{c}+2\frac{V^3}{3c^3},$$

可得 $\mathrm{d}\varepsilon_\omega\approx\dfrac{e^2V^2}{3\pi c^3}\mathrm{d}\omega$.

例题 11.4 一电荷为 e 的带电粒子沿 z 轴做周期为 ω 的简谐振动 (非相对论), 求辐射的角分布和总辐射功率.

解 $z=z_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$, 则电偶极矩为 $\overrightarrow{d}=\overrightarrow{e}_zez_0\cos\omega t$, 所以 $\ddot{\overrightarrow{d}}=-\omega^2\overrightarrow{d}$.

电偶极辐射功率的角分布为

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{1}{4\pi c^3}(\ddot{\overrightarrow{d}})^2\sin^2\theta=\frac{e^2\omega^4}{4\pi c^3}z_0^2\cos^2\omega t\sin^2\theta.$$

在一个周期内对电偶极辐射功率角分布作时间平均得

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{e^2\omega^4}{8\pi c^3}z_0^2\sin^2\theta.$$

总辐射功率的时间平均为

$$P=\frac{e^2\omega^4}{3c^3}z_0^2.$$

下面用普遍公式 (作为对上面普遍公式的检验) 来讨论

$$\rho=e\delta(\overrightarrow{r}-z_0\cos(\omega t)\overrightarrow{e}_z)=e\frac{\delta(r-z_0\cos(\omega t))}{r^2}\sum_{ll'm'}\mathrm{Y}_{\ell'm'}(\widehat{r})\mathrm{Y}^*_{l'm'}(\widehat{e}_z),$$

则

$$Q_{\ell m}=\int\rho r^\ell\mathrm{Y}^*_{\ell m}\mathrm{d}^3x=ez_0^\ell\mathrm{Y}^*_{lm}(\widehat{e}_z)=ez_0^\ell\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\delta_{m0}\quad(\text{略去了对}t\text{的依赖关系}).$$

可得

$$a_E(\ell m) = e\frac{4\pi k^{\ell+2}}{\mathrm{i}(2\ell+1)!!}\left(\frac{\ell+1}{\ell}\right)^{\frac{1}{2}} z_0^{\ell}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\delta_{m0}.$$

所以

$$a_E(10) = \sqrt{4\pi}\sqrt{\frac{2}{3}}k^3 z_0 e.$$

在一个周期内对时间平均的角分布为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} &= \frac{c}{8\pi k^2}|(-\mathrm{i})^2(a_E(10)\overrightarrow{X}_{10}|^2 = \frac{c}{8\pi k^2}|a_E(10)|^2|\overrightarrow{X}_{10}|^2 \\ &= \frac{e^2\omega^4}{3c^3}z_0^2\frac{1}{4}(|L_+Y_{10}|^2 + |L_-Y_{10}|^2) = \frac{e^2\omega^4}{8\pi c^3}z_0^2\sin^2\theta,\end{aligned}$$

总辐射功率的时间平均为

$$P = \frac{c}{8\pi k^2}|a_E(10)|^2 = \frac{c}{8\pi k^2}\left(\sqrt{4\pi}\sqrt{\frac{2}{3}}k^3 z_0 e\right)^2 = \frac{e^2ck^4}{3}z_0^2 = \frac{e^2\omega^4}{3c^3}z_0^2.$$

两种方法得到结果相同.

例题 11.5　由中心馈送的长度为 d 的细直天线上的电流密度近似为

$$\overrightarrow{j}(\overrightarrow{r'}, t') = \overrightarrow{e_{z'}}I_0\delta(x')\delta(y')\left(1 - \frac{2|z'|}{d}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t'},\quad |z'| \leqslant \frac{d}{2},$$

在 $\lambda \gg d$ 的条件下, 求 $\overrightarrow{r}$ 处 $(r \gg \lambda)$ 的辐射电磁场及辐射功率.

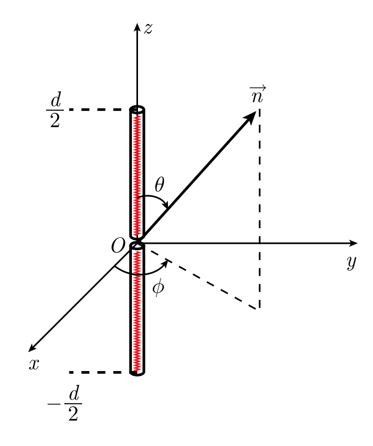


图 11.4　时空示意图

解 1　在 $r \gg \lambda \gg d$ 的条件下, 有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r},t) &= \int \frac{\overrightarrow{j}\left(\overrightarrow{r'},t-\dfrac{R}{c}\right)}{cR}\mathrm{d}\overrightarrow{r'} \approx \frac{1}{cr}\int \overrightarrow{j}(\overrightarrow{r'},t-\frac{r}{c})\mathrm{d}\overrightarrow{r'} \\ &= \overrightarrow{e}_{z'}\frac{I_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr-\mathrm{i}\omega t}}{cr}\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}\left(1-\frac{2|z'|}{d}\right)\mathrm{d}z' = \overrightarrow{e}_{z'}\frac{I_0 d\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr-\mathrm{i}\omega t}}{2cr},\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{H} = \overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A} = \frac{1}{c}\dot{\overrightarrow{A}}\times\widehat{n} = -\frac{\mathrm{i}kI_0 d}{2c}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr-\mathrm{i}\omega t}}{r}(\overrightarrow{e}_{z'}\times\overrightarrow{n}).$$

物理的场为实数, 所以

$$\overrightarrow{H} = -\frac{kI_0 d}{2cr}\sin(\omega t+\alpha)(\overrightarrow{e}_{z'}\times\overrightarrow{n}) = -\frac{kI_0 d}{2cr}\sin\theta\sin(\omega t+\alpha)\overrightarrow{e}_{\varphi},$$

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{H}\times\overrightarrow{n} = -\frac{kI_0 d}{2cr}\sin\theta\sin(\omega t+\alpha)\overrightarrow{e}_{\theta},$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}P &= \frac{c}{4\pi}\overrightarrow{H}^2 r^2\mathrm{d}\Omega \\ &= \frac{(kI_0 d)^2}{16\pi c}\sin^2\theta\sin^2(\omega t+\alpha)\mathrm{d}\Omega.\end{aligned}$$

在一个周期内取时间平均得

$$\overline{\mathrm{d}P} = \frac{\omega^2 I_0^2 d^2}{32\pi c^3}\sin^2\theta\mathrm{d}\Omega.$$

总辐射功率为$\overline{P} = \dfrac{\omega^2 I_0^2 d^2}{12c^3}$.

解 2　利用公式

$$\begin{aligned}\mathrm{d}P &= \frac{c}{8\pi}(\overrightarrow{E}\times\overrightarrow{H}^*)r^2\mathrm{d}\Omega \\ &= \frac{c}{8\pi k^2}|\sum_{\ell m}(-\mathrm{i})^{\ell+1}(a_E(\ell m)\overrightarrow{X}_{\ell m}+a_M(\ell m)\overrightarrow{n}\times\overrightarrow{X}_{\ell m})|^2\mathrm{d}\Omega,\end{aligned}$$

其中 $\overrightarrow{X}_{\ell m} = \dfrac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}\overrightarrow{L}\mathrm{Y}_{\ell m}$, 由

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{X}_{\ell m}|^2 = &\frac{1}{\ell(\ell+1)}\left\{\frac{1}{2}(\ell-m)(\ell+m+1)|\mathrm{Y}_{\ell m+1}|^2\right. \\ &\left.+\frac{1}{2}(\ell+m)(\ell-m+1)|\mathrm{Y}_{\ell m-1}|^2+m^2|\mathrm{Y}_{\ell m}|^2\right\}\end{aligned}$$

有

$$|\overrightarrow{X}_{10}|^2 = \frac{1}{2}\{|\mathrm{Y}_{11}|^2+|\mathrm{Y}_{1-1}|^2\} = \frac{3}{8\pi}\sin^2\theta.$$

又 $\vec{j}(\vec{r'},t')=\vec{e_{z'}}I(z)\delta(x')\delta(y')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t'}$, $|z'|\leqslant\dfrac{d}{2}$,
用球坐标表示

$$\vec{j}(\vec{r},t)=\vec{e}_r\frac{I(r)}{2\pi r^2}\{\delta(\cos\theta-1)-\delta(\cos\theta+1)\}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}.$$

由 $\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r},t)=\mathrm{i}\omega\rho$ 可得

$$\rho=\frac{1}{\mathrm{i}\omega 2\pi}\frac{\mathrm{d}I(r)}{\mathrm{d}r}\left\{\frac{\delta(\cos\theta-1)-\delta(\cos\theta+1)}{r^2}\right\}.$$

则

$$a_E(\ell m)=\frac{4\pi\mathrm{i}k^2}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}\int\mathrm{Y}^*_{\ell m}(\theta,\phi)\left\{-\frac{\mathrm{i}}{c}kj_\ell(kr)(\vec{r}\cdot\vec{j})-\rho\frac{\partial}{\partial r}(r\mathrm{j}_\ell(kr))\right\}\mathrm{d}\vec{r},$$

又有

$$\vec{r}\cdot\vec{j}=\frac{rI(r)}{2\pi r^2}\{\delta(\cos\theta-1)-\delta(\cos\theta+1)\}$$

和

$$\begin{aligned}&\int\mathrm{Y}^*_{\ell m}(\theta,\phi)\{\delta(\cos\theta-1)-\delta(\cos\theta+1)\}\mathrm{d}\Omega\\=&2\pi\delta_{m,0}\{\mathrm{Y}_{\ell 0}(0)-\mathrm{Y}_{\ell 0}(\pi)\}\\=&2\pi\delta_{m,0}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\{1-(-1)^\ell\}=\sqrt{4\pi(2\ell+1)}\delta_{m,0}\quad(\ell\text{是奇数}),\end{aligned}$$

可以得到

$$\begin{aligned}a_E(\ell 0)&=\frac{4\pi\mathrm{i}k^2}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}\sqrt{4\pi(2\ell+1)}\int_0^{d/2}\left\{-\frac{\mathrm{i}}{c2\pi}k\mathrm{j}_\ell(kr)rI(r)-\frac{1}{\mathrm{i}\omega 2\pi}\frac{\mathrm{d}I(r)}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r\mathrm{j}_\ell(kr))\right\}\mathrm{d}r\\&=\frac{2k}{c}\sqrt{\frac{4\pi(2\ell+1)}{\ell(\ell+1)}}\int_0^{d/2}\left\{r\mathrm{j}_\ell(kr)\left(\frac{\mathrm{d}^2I(r)}{\mathrm{d}r^2}+k^2I(r)\right)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\mathrm{j}_\ell(kr)\frac{\mathrm{d}I(r)}{\mathrm{d}r}\right)\right\}\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

对于短天线 $kd\ll 1$, 有

$$I(r)=I_0\left(1-\frac{2r}{d}\right),$$

$$\frac{\mathrm{d}I(r)}{\mathrm{d}r}=-\frac{2I_0}{d},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2I(r)}{\mathrm{d}r^2}=0,$$

$$\mathrm{j}_\ell(kr)\approx\frac{(kr)^\ell}{(2\ell+1)!!}.$$

代入 $\ell=1$ 有

$$a_E(10)=\frac{2k}{c}\sqrt{6\pi}\int_0^{d/2}\left\{r\mathrm{j}_1(kr)\left(\frac{\mathrm{d}^2I(r)}{\mathrm{d}r^2}+k^2I(r)\right)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\mathrm{j}_1(kr)\frac{\mathrm{d}I(r)}{\mathrm{d}r}\right)\right\}\mathrm{d}r.$$

因为

$$\left\{r\mathrm{j}_1(kr)\left(\frac{\mathrm{d}^2I(r)}{\mathrm{d}r^2}+k^2I(r)\right)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\mathrm{j}_1(kr)\frac{\mathrm{d}I(r)}{\mathrm{d}r}\right)\right\}\approx\frac{4I_0}{3d}kr,$$

由此可得

$$\int_0^{d/2}\left\{r\mathrm{j}_1(kr)\left(\frac{\mathrm{d}^2I(r)}{\mathrm{d}r^2}+k^2I(r)\right)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\mathrm{j}_1(kr)\frac{\mathrm{d}I(r)}{\mathrm{d}r}\right)\right\}\mathrm{d}r\approx\frac{I_0kd}{6},$$

所以

$$a_E(10)=\frac{2k}{c}\sqrt{6\pi}\frac{I_0kd}{6}=\frac{2I_0k^2d}{c}\sqrt{\frac{\pi}{6}}.$$

辐射功率角分布为

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{c}{8\pi k^2}(a_E(10))^2|\overrightarrow{X}_{10}|^2=\frac{k^2I_0^2d^2}{12c}\frac{3}{8\pi}\sin^2\theta=\frac{\omega^2I_0^2d^2}{32\pi c^3}\sin^2\theta.$$

总辐射功率为

$$\overline{P}=\frac{\omega^2I_0^2d^2}{12c^3}.$$

例题 11.6　一个轨道电子被原子核的质子俘获变成中子, 求此过程的辐射频谱.

解　反应过程

$$e+Z\to(Z-1)+\nu_e$$

反应前电子做轨道运动

$$\overrightarrow{V}(t)=-\overrightarrow{e}_xr_0\omega_0\cos(\omega_0t+\alpha)+\overrightarrow{e}_yr_0\omega_0\sin(\omega_0t+\alpha),$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\varepsilon}{\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\Omega}=\frac{e^2\omega^2}{4\pi^2c^3}\left|\int_{-\infty}^0\overrightarrow{n}\times(\overrightarrow{n}\times\overrightarrow{V})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\right|^2.$$

其中利用了条件 $\frac{\omega r_0}{c}\ll1$.

令 $\overrightarrow{n}$ 在 xz 平面上, 则

$$\int_{-\infty}^0\overrightarrow{n}\times(\overrightarrow{n}\times\overrightarrow{V})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=-r_0\omega_0(\overrightarrow{e}_{/\!/}I_1+\overrightarrow{e}_\perp I_2),$$

$$I_1=\int_{-\infty}^0\cos(\omega_0t+\alpha)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t,$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{0} \sin(\omega_0 t + \alpha)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t,$$

其中 $\overrightarrow{e}_{/\!/}$ 在 xz 平面内, $\overrightarrow{e}_{\perp}$ 与 xz 平面垂直.

$$\frac{\mathrm{d}^2\varepsilon}{\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\varOmega} = \frac{e^2\omega^2}{4\pi^2c^3}\frac{r_0^2\omega_0^2}{(\omega^2-\omega_0^2)^2}[(\omega^2\cos^2\alpha+\omega_0^2\sin^2\alpha)+\cos^2\theta(\omega_0^2\cos^2\alpha+\omega^2\sin^2\alpha)],$$

因轨道电子可在轨道的任何地方被原子核俘获, 所以要对相位 α 取平均, 有

$$\frac{\mathrm{d}^2\varepsilon}{\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\varOmega} = \frac{e^2}{4\pi^2c}\left(\frac{r_0\omega_0}{c}\right)^2\frac{\omega^2(\omega^2+\omega_0^2)}{(\omega^2-\omega_0^2)^2}\frac{1}{2}(1+\cos^2\theta).$$

因为轨道电子还有内秉磁矩, 所以轨道电子被原子核俘获时磁偶极矩有突然变化, 这也会导致有辐射.

$$\frac{\mathrm{d}^2\varepsilon}{\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\varOmega} = \frac{\omega^4}{4\pi^2c^3}|\int_{-\infty}^{0}\overrightarrow{n}\times\overrightarrow{\mu}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}|^2,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\varepsilon}{\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\varOmega} = \frac{\omega^2}{4\pi^2c^3}\mu^2\sin^2\varTheta,$$

这里 $\varTheta$ 是磁矩的方向与观测方向之间的夹角.

第 12 章　电磁波的散射和衍射

电磁波的散射和衍射是紧密相连的课题. 对电磁波散射的处理方法依赖于入射电磁波的波长 (λ) 和散射体 (靶) 的尺寸 (a) 的相对大小. 当 $\lambda \gg a$ 时, 可采用最低阶的诱导电偶极矩和磁偶极矩的方法来描述, 散射体在长波电磁波的作用下产生随时间变化的诱导电偶极矩和磁偶极矩, 因而给出电偶极和磁偶极辐射, 此即电磁波在散射体上的散射. 当 $\lambda \sim a$ 时, 情况较为复杂, 需要用多极展开的方法作系统的讨论, 下面将选取半径为 R 的金属球对电磁波的散射为例进行讨论. 对于一般情况我们给出光学定理. 对 $\lambda \ll a$ 的情况可在几何光学的基础上讨论光束对几何光学的偏离, 即电磁波的衍射. 电磁波的衍射是由于波长的有限大小引起的. 若在光束的传播路径上有一线性尺寸为 a 的障碍物, 基于傅里叶展开的论证可知通过障碍物边沿的光束将具有量级为 $\theta \sim \frac{\lambda}{a}$ 的偏转角, 此即电磁波的衍射现象.

12.1　长波长电磁波的散射

假定入射单色平面波为

$$\overrightarrow{E}_{\mathrm{inc}}(\overrightarrow{r},t) = E_\alpha \widehat{e}_\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\overrightarrow{n}_0\cdot\overrightarrow{r}-\mathrm{i}\omega t},$$

$$\overrightarrow{H}_{\mathrm{inc}}(\overrightarrow{r},t) = \overrightarrow{n}_0 \times \overrightarrow{E}_{\mathrm{inc}}(\overrightarrow{r},t),$$

其中 $\overrightarrow{n}_0$ 是入射波的传播方向, $\widehat{e}_\alpha$ 是入射波的单位极化矢量.

当 $\lambda \gg a$ 时, 在散射体范围内入射波的电磁场可视为空间上是均匀的, 在此电磁场的作用下散射体产生诱导电偶极矩 $\overrightarrow{d}$ 和磁偶极矩 $\overrightarrow{m}$ (对电介质可只考虑诱导电偶极矩 $\overrightarrow{d}$, 对金属要同时考虑电偶极矩 $\overrightarrow{d}$ 和磁偶极矩 $\overrightarrow{m}$), 它们带有随时间变化的因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$.

在远离散射体的区域 $r \gg a$, 有

$$\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r},t) = \left\{\frac{\dot{\overrightarrow{d}}}{cr} + \frac{\dot{\overrightarrow{m}}\times\widehat{n}}{cr}\right\}_{t'=t-\frac{r}{c}},$$

$$\overrightarrow{H}_{\mathrm{sc}}(\overrightarrow{r},t) = \overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A},$$

$$\overrightarrow{E}_{\mathrm{sc}}(\overrightarrow{r},t) = \frac{\mathrm{i}}{k}\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{H}_{\mathrm{sc}}$$

诱导电偶极矩和磁偶极矩的辐射波即是散射体的散射波, 在辐射波的平面波区 ($r \gg \lambda$), 可以得到

$$\begin{aligned}\vec{H}_{\rm sc}(\vec{r},t) &= \frac{1}{c^2 r}\{\ddot{\vec{d}} + \ddot{\vec{m}} \times \hat{n}\}_{t'=t-r} \times \hat{n} \\ &= k^2 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}[(\vec{n} \times \vec{d}) + \vec{n} \times (\vec{m} \times \vec{n})]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t},\end{aligned}$$

$$\vec{E}_{\rm sc}(\vec{r},t) = \vec{H}_{\rm sc}(\vec{r},t) \times \vec{n},$$

$$\vec{S}_{\rm sc} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}_{\rm sc}(\vec{r},t) \times \vec{H}_{\rm sc}(\vec{r},t) = \frac{c}{4\pi}|\vec{H}_{\rm sc}|^2\vec{n},$$

其中 $k = \dfrac{\omega}{c}$, $\vec{n}$ 是散射波传播方向的单位矢量.

散射波的时间平均功率的角分布为

$$\frac{\overline{\mathrm{d}P}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{c}{8\pi}r^2(\vec{E}_{\rm sc} \times \vec{H}^*_{\rm sc}) = \frac{c}{8\pi}r^2|\vec{H}_{\rm sc}|^2 = \frac{c}{8\pi}r^2|\vec{E}_{\rm sc}|^2.$$

描述电磁波散射常用的物理量为有效散射截面

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\overline{\mathrm{d}P}}{\overline{S}_{\rm inc}},$$

其中 $\overline{S}_{\rm inc}$ 是入射波的玻印亭矢量的时间平均.

若入射波和散射波的单位极化矢量分别为 $\hat{e}_\lambda$ 和 $\hat{e}_{\lambda'}$, 则可以得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(\vec{n}, \vec{e}_{\lambda'}, \vec{n}_0, \vec{e}_\lambda) &= \frac{r^2|\hat{e}^*_{\lambda'} \cdot \vec{E}_{\rm sc}|^2}{|\hat{e}^*_\lambda \cdot \vec{E}_{\rm inc}|^2} \\ &= \frac{k^4}{E_0^2}|\hat{e}^*_{\lambda'} \cdot \vec{p} + (\vec{n} \times \hat{e}^*_{\lambda'}) \cdot \vec{m}|^2, \end{aligned} \tag{12.1}$$

其中在 $\vec{p}$ 和 $\vec{m}$ 中含有入射波的单位极化矢量 $\hat{e}_\lambda$. 需要指出, 在式 (12.1) 中必须用单位极化矢量的复共轭, 这样对圆极化的情况才能给出正确的结果.

可以看出, 对于入射波的波长 λ 比散射体的尺寸 a 大很多的情况, 散射波与散射体的具体形状无关, 只由它产生的诱导电偶极矩和磁偶极矩决定. 作为例子下面将讨论单色平面电磁波在一个半径为 a 的金属球上的散射并假定金属球是理想导体.

在外电磁场的作用下, 金属球产生的诱导电偶极矩和磁偶极矩分别为 (见例题 8.2 和例题 8.3)

$$\vec{p} = a^3\vec{E}_{\rm sc} = a^3\hat{e}_\lambda E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\vec{n}_0\cdot\vec{r}-\mathrm{i}\omega t},$$

$$\begin{aligned}\vec{m} &= -\frac{a^3}{2}\vec{H}_{\text{inc}}(\vec{r},t) = -\frac{a^3}{2}\vec{n}_0\times\vec{E}_{\text{inc}}(\vec{r},t)\\ &= -\frac{a^3}{2}\vec{n}_0\times\widehat{e}_\lambda E_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\vec{n}_0\cdot\vec{r}-\mathrm{i}\omega t}.\end{aligned}$$

将它们代入到式 (12.1), 得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varOmega} &= k^4a^6|\widehat{e}^*_{\lambda'}\cdot\widehat{e}_\lambda-\frac{1}{2}(\vec{n}\times\widehat{e}^*_{\lambda'})\cdot(\vec{n}_0\times\widehat{e}_\lambda)|^2\\ &= k^4a^6|\widehat{e}^*_{\lambda'}\cdot\widehat{e}_\lambda\left(1-\frac{1}{2}\vec{n}\cdot\vec{n}_0\right)+\frac{1}{2}(\vec{n}\cdot\widehat{e}_\lambda)(\vec{n}_0\cdot\widehat{e}^*_{\lambda'})|^2.\end{aligned}$$

因为 $\vec{n}$ 和 $\vec{n}_0$ 确定散射平面, 假定散射角为 θ. 又因为散射波的极化方向与 $\vec{n}$ 垂直, 所以 $\widehat{e}_{\lambda'}$ 与散射平面平行或与散射平面垂直.

通常入射波是非极化的, 我们应当对入射波的极化求平均.

当散射波的极化方向与散射平面垂直时,

$$\vec{n}_0\cdot\widehat{e}^*_{\lambda'}=0,$$

则对入射波的极化求平均, 有

$$\frac{1}{2}\sum_{\lambda=1,2}\widehat{e}^i_{\lambda'}\widehat{e}^i_\lambda\widehat{e}^j_{\lambda'}\widehat{e}^j_\lambda=\frac{1}{2}\widehat{e}^i_{\lambda'}\widehat{e}^j_{\lambda'}(\delta_{ij}-n^i_0n^j_0)=\frac{1}{2},$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_\perp}{\mathrm{d}\varOmega}=\frac{k^4a^6}{2}|1-\frac{1}{2}\cos\theta|^2.$$

当散射波的极化方向与散射平面平行时,

$$|\vec{n}_0\cdot\widehat{e}^*_{\lambda'}|=\sin\theta.$$

对入射波的极化求平均, 有

$$\frac{1}{2}\sum_{\lambda=1,2}\widehat{e}^i_{\lambda'}\widehat{e}^i_\lambda\widehat{e}^j_{\lambda'}\widehat{e}^j_\lambda=\frac{1}{2}(1-\sin^2\theta),$$

$$\frac{1}{2}\sum_{\lambda=1,2}(\vec{n}\cdot\widehat{e}_\lambda)(\vec{n}\cdot\widehat{e}_\lambda)=\frac{1}{2}(1-\cos^2\theta),$$

$$\frac{1}{2}\sum_{\lambda=1,2}(\vec{n}\cdot\widehat{e}_\lambda)(\widehat{e}^*_{\lambda'}\cdot\widehat{e}_\lambda)=-\frac{1}{2}(\vec{n}\cdot\vec{n}_0)(\widehat{e}^*_{\lambda'}\cdot\widehat{n}_0),$$

得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\sigma_{/\!/}}{\mathrm{d}\Omega}=&\frac{k^4a^6}{2}\left[\left(1-\frac{1}{2}\cos\theta\right)^2\cos^2\theta+\frac{1}{4}(1-\cos^2\theta)^2\right.\\&\left.-\left(1-\frac{1}{2}\cos\theta\right)\cos\theta(1-\cos^2\theta)\right]\\=&\frac{k^4a^6}{2}|\cos\theta-1|^2.\end{aligned}$$

由此可得总微分散射截面

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{\mathrm{d}\sigma_{/\!/}}{\mathrm{d}\Omega}+\frac{\mathrm{d}\sigma_{\perp}}{\mathrm{d}\Omega}=k^4a^6\left[\frac{5}{8}(1+\cos^2\theta)-\cos\theta\right]\tag{12.2}$$

和散射波的极化

$$\Pi(\theta)=\frac{\dfrac{\mathrm{d}\sigma_{\perp}}{\mathrm{d}\Omega}-\dfrac{\mathrm{d}\sigma_{/\!/}}{\mathrm{d}\Omega}}{\dfrac{\mathrm{d}\sigma_{\perp}}{\mathrm{d}\Omega}+\dfrac{\mathrm{d}\sigma_{/\!/}}{\mathrm{d}\Omega}}=\frac{3\sin^2\theta}{5(1+\cos^2\theta)-8\cos\theta}.\tag{12.3}$$

散射体也可以是单个带电粒子或带电粒子体系. 当入射电磁波不强时, 则讨论它在非相对论带电粒子体系上的散射时可以只考虑电偶极辐射, 因为在这种情况下诱导磁偶极矩是诱导电偶极矩的 $\dfrac{V}{c}$ 的量级, V 是带电粒子的运动速度.

当散射体是静止自由电荷时, 可以讨论电磁波在一个电荷上的散射.

我们还假定入射波较弱, 即在电磁波的一个周期内电荷受到的洛伦兹力中与磁场有关的项可以略去, 且可视外电场强度与位置无关, 即

$$\vec{E}_{\mathrm{inc}}=\vec{E}_0\cos(\omega t-\alpha),$$

$\vec{E}_0$ 与位置无关, $\vec{E}_0=\hat{e}_\lambda E_0$, $\hat{e}_\lambda$ 是单位极化矢量.

由带电粒子运动方程 $m\ddot{\vec{r}}=e\vec{E}_{\mathrm{inc}}$, 得到

$$\ddot{\vec{d}}=\frac{e^2}{m}\vec{E}_{\mathrm{inc}},$$

其中 $\vec{d}=e\vec{r}$ 是带电粒子的电偶极矩.

对于散射波的功率, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}P=&\frac{1}{4\pi c^3}(\ddot{\vec{d}}\times\vec{n})^2\mathrm{d}\Omega=\frac{1}{4\pi c^3}\left(\frac{e^2}{m}\right)^2(\vec{E}_{\mathrm{inc}}\times\vec{n})^2\mathrm{d}\Omega\\=&\frac{1}{4\pi c^3}\left(\frac{e^2}{m}\right)^2(\vec{E}_{\mathrm{inc}}^2-(\vec{E}_{\mathrm{inc}}\cdot\vec{n})^2)\mathrm{d}\Omega,\end{aligned}$$

在一个周期内对时间平均可得

$$\overline{\mathrm{d}P}=\frac{1}{8\pi c^3}\left(\frac{e^2}{m}\right)^2|E_0|^2(1-(\hat{e}_\lambda^*\cdot\vec{n})(\hat{e}_\lambda\cdot\vec{n})),$$

$$\overline{S_{\rm inc}}=\frac{c}{4\pi}\overline{(\vec{E}_{\rm inc}\times\vec{H}_{\rm inc})}=\frac{c}{8\pi}|\hat{e}_\lambda^*\cdot\vec{E}|^2=\frac{c}{8\pi}|E_0|^2,$$

所以

$$\mathrm{d}\sigma=\frac{\overline{\mathrm{d}I}}{\overline{S}_{\rm in}}=\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\sin^2\vartheta\mathrm{d}\Omega,$$

其中 ϑ 是入射波电场的极化方向与散射波的传播方向之间的夹角.

如果入射波是非极化的, 则应对所有极化方向取平均,

$$\overline{\sin^2\vartheta}=1-n_\alpha n_\beta\overline{e^\alpha e^\beta},$$

$$\overline{e^\alpha e^\beta}=\frac{1}{2}\sum_{\lambda=1,2}e_\lambda^\alpha e_\lambda^\beta=\frac{1}{2}\left(\delta_{\alpha\beta}-\frac{k_\alpha k_\beta}{|\vec{k}|^2}\right),$$

$$\overline{\sin^2\vartheta}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{(\vec{k}\cdot\vec{n})^2}{|\vec{k}|^2}\right)=\frac{1}{2}(1+\cos^2\theta),$$

其中 θ 是入射波方向与散射波方向之间的夹角.

总散射截面为

$$\sigma=\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\int\frac{1}{2}(1+\cos^2\theta)\mathrm{d}\Omega=\frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2,\tag{12.4}$$

此即 Thomson 公式.

当散射体的带电粒子系统有内部运动时, 假定内部运动的特征频率为 $\omega_0\sim\dfrac{V}{a}$, 其中 a 和 V 分别是带电粒子系统的特征尺寸和特征速度 (假定 $V\ll c$). 散射波的频率可以和入射波的频率相同 (称为相干散射), 也可以和入射波的频率不同 (称为非相干散射).

当入射波的频率 $\omega\ll\omega_0$ 时, 原则上散射波既包含相干散射也包含非相干散射. 这里讨论相干散射. 假定入射电磁波很弱, 则近似地有

$$\vec{j}=\vec{j}_0+\vec{j}',$$

其中 $\vec{j}_0$ 是无入射电磁波时带电粒子系统的固有电流密度, $\vec{j}'$ 是在入射电磁波的作用下电流密度的改变量, 即诱导电流. 因 $\lambda\gg a$, 此诱导电流产生随时间变化的诱导电偶极矩 $\vec{d}$, 此即上面已讨论过的长波散射.

当入射波的频率 $\omega \gg \omega_0$ 时 (高频波的散射), 对每一个带电粒子有方程

$$m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}'}{\mathrm{d}t} = e\overrightarrow{E} = \mathrm{e}\overrightarrow{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r})},$$

其中 $\overrightarrow{k} = \frac{\omega}{c}$, $\overrightarrow{n}$ 是入射波方向, $\overrightarrow{r}$ 是该电荷所在位置因而是 t 的函数.

因 $\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r} \sim \omega t\frac{V}{c}$, 又因为电子的内部运动是非相对论的, 所以在解此方程时可视 $\overrightarrow{r}$ 不变, 即

$$\overrightarrow{V}' = -\frac{1}{\mathrm{i}m\omega}e\overrightarrow{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r})}.$$

所以

$$\overrightarrow{A}' = \frac{1}{cR_0}\sum(e\overrightarrow{V}')_{t'=t-\frac{R_0}{c}-\frac{\overrightarrow{n}'\cdot\overrightarrow{r}}{c}} = -\frac{1}{\mathrm{i}cR_0\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\left(t-\frac{R_0}{c}\right)}\overrightarrow{E}_0\sum\left(\frac{e^2}{m}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\overrightarrow{q}\cdot\overrightarrow{r}},$$

其中 $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{k}' - \overrightarrow{k} = \frac{\omega}{c}\overrightarrow{n}' - \frac{\omega'}{c}\overrightarrow{n} \approx \frac{\omega}{c}(\overrightarrow{n}' - \overrightarrow{n})$, $\overrightarrow{n}'$ 是散射波的方向.

取 $\omega' = \omega$ (因 $|\omega' - \omega| \sim \omega_0 \ll \omega$), 则

$$\overrightarrow{H}' = \frac{\overrightarrow{E}_0\times\overrightarrow{n}'}{c^2R_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\left(t-\frac{R_0}{c}\right)}\frac{e^2}{m}\sum\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\overrightarrow{q}\cdot\overrightarrow{r}},$$

由此可得

$$\mathrm{d}P = \frac{c|\overrightarrow{H}'|^2}{8\pi}R_0^2\mathrm{d}\varOmega = \frac{e^4}{8\pi c^3m^2}(\overrightarrow{n}'\times\overrightarrow{E}_0)^2\left|\sum\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\overrightarrow{q}\cdot\overrightarrow{r}}\right|^2\mathrm{d}\varOmega.$$

有效散射截面

$$\mathrm{d}\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\overline{\left|\sum\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\overrightarrow{q}\cdot\overrightarrow{r}}\right|^2}\sin^2\vartheta\mathrm{d}\varOmega,$$

其中横线代表对时间取平均.

因为 $\overrightarrow{q}\cdot\overrightarrow{r} \sim \frac{a}{\lambda}$, 当 $\frac{a}{\lambda} \ll 1$ 时, $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\overrightarrow{q}\cdot\overrightarrow{r}} \approx 1$, 得到

$$\mathrm{d}\sigma = \left(\frac{Ze^2}{mc^2}\right)^2\sin^2\vartheta\mathrm{d}\varOmega,$$

其中 Z 是系统的电子数目.

当 $\frac{a}{\lambda} \gg 1$ 时, 上面求和中的交叉项 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\overrightarrow{q}\cdot(\overrightarrow{r}_1-\overrightarrow{r}_2)}$ 是快速振荡函数, 其时间平均值为零, 得到

$$\mathrm{d}\sigma = Z\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\sin^2\vartheta\mathrm{d}\varOmega.$$

在表达式$\overrightarrow{H}'=\dfrac{\overrightarrow{E}_0\times\overrightarrow{n}'}{c^2R_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\left(t-\frac{R_0}{c}\right)}\dfrac{e^2}{m}\sum\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\overrightarrow{q}\cdot\overrightarrow{r}}$ 中, 因 $\overrightarrow{r}$ 是 t 的函数, 所以原则上它既包括相干散射也包括非相干散射.

相干散射的振幅为

$$\overrightarrow{H}'_{\mathrm{coh}}\approx\frac{\overrightarrow{E}_0\times\overrightarrow{n}'}{c^2R_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-\frac{R_0}{c})}\frac{e^2}{m}\left(\overline{\sum\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\overrightarrow{q}\cdot\overrightarrow{r}}}\right),$$

因此相干散射的截面为

$$\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{coh}}=\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2|\left(\overline{\sum\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\overrightarrow{q}\cdot\overrightarrow{r}}}\right)|^2\sin^2\vartheta\mathrm{d}\Omega.$$

当 $\dfrac{a}{\lambda}\ll 1$ 时,

$$|\left(\overline{\sum\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\overrightarrow{q}\cdot\overrightarrow{r}}}\right)|^2=\overline{|\sum\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\overrightarrow{q}\cdot\overrightarrow{r}}|^2}=Z^2,$$

得 $\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{coh}}=\mathrm{d}\sigma$, 即散射是完全相干的.

当 $\dfrac{a}{\lambda}\gg 1$ 时,

$$\overline{\sum\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\overrightarrow{q}\cdot\overrightarrow{r}}}=0,$$

得 $\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{coh}}=0$, 即散射是完全非相干的.

12.2　电磁波在金属球上的散射

当入射电磁波的波长与散射体的尺寸可比较时, 需要用多极展开的方式作系统的处理. 为了讨论的简单, 下面讨论一单色平面电磁波在一理想导体金属球上的散射 (图 12.1).

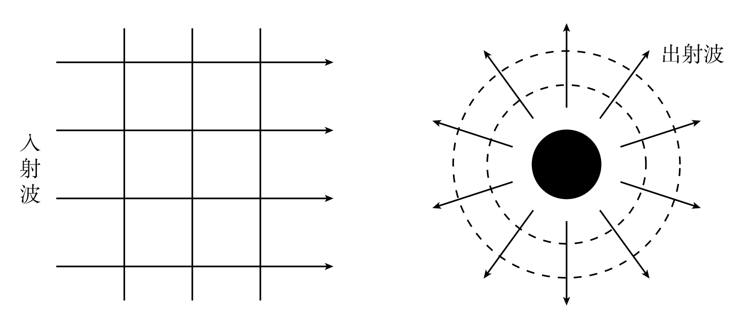


图 12.1　电磁波在金属球上的散射

将平面波按球面波展开, 有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}} = 4\pi\sum_{\ell m}\mathrm{i}^{\ell}\mathrm{j}_{\ell}(kr)\mathrm{Y}^{*}_{\ell m}(\theta,\phi)\mathrm{Y}_{\ell m}(\theta',\phi'),$$

其中 (θ,ϕ) 和 (θ',ϕ') 分别是 $\hat{r}$ 和 $\hat{k}$ 的球坐标.

取 $\hat{k}$ 为 z 轴, 利用

$$\mathrm{Y}_{\ell m}(\theta'=0) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\delta_{m,0},$$

可以得到

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz} = \sum_{\ell}\mathrm{i}^{\ell}\sqrt{4\pi(2\ell+1)}\mathrm{j}_{\ell}(kr)\mathrm{Y}_{\ell,0}(\theta). \tag{12.5}$$

对于沿 z 方向传播的圆极化单色平面电磁波, 有 (略去了随时间变化的因子)

$$\vec{E}_{\mathrm{inc}} = (\vec{e}_x \pm \mathrm{i}\,\vec{e}_y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz},$$

$$\vec{H}_{\mathrm{inc}} = \vec{e}_z \times \vec{E}_{\mathrm{inc}} = \mp\mathrm{i}\vec{E}_{\mathrm{inc}}.$$

因为平面波在空间的任何地方都是有限的, 所以对平面波的电场 $\vec{E}$ 和磁场 $\vec{H}$, 有展开式

$$\vec{E}_{\mathrm{inc}} = \sum_{\ell m}[a_{\pm}(\ell,m)\mathrm{j}_{\ell}(kr)\vec{X}_{\ell m} + \frac{\mathrm{i}}{k}b_{\pm}(\ell,m)\vec{\nabla}\times\mathrm{j}_{\ell}(kr)\vec{X}_{\ell m}], \tag{12.6}$$

$$\vec{H}_{\mathrm{inc}} = \sum_{\ell m}[b_{\pm}(\ell m)\mathrm{j}_{\ell}(kr)\vec{X}_{\ell m} - \frac{\mathrm{i}}{k}a_{\pm}(\ell m)\vec{\nabla}\times\mathrm{j}_{\ell}(kr)\vec{X}_{\ell m}], \tag{12.7}$$

利用

$$\vec{\nabla} = \frac{\vec{r}}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\mathrm{i}}{r^2}\vec{r}\times\vec{\ell},$$

及矢量球谐函数 $\vec{X}_{\ell m}$ 的性质, 可以得到下列公式:

$$\int[f_{\ell'}(r)\vec{X}_{\ell' m'}]^{*}\cdot[g_{\ell}(r)\vec{X}_{\ell m}]\mathrm{d}\Omega = f^{*}_{\ell'}(r)g_{\ell}(r)\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'},$$

$$\int[f_{\ell'}(r)\vec{X}_{\ell' m'}]^{*}\cdot[\vec{\nabla}\times g_{\ell}(r)\vec{X}_{\ell m}]\mathrm{d}\Omega = 0,$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{k^2}\int[\vec{\nabla}\times f_{\ell'}(r)\vec{X}_{\ell' m'}]^{*}\cdot[\vec{\nabla}\times g_{\ell}(r)\vec{X}_{\ell m}]\mathrm{d}\Omega\\ =&\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}\left[f^{*}_{\ell'}(r)g_{\ell}(r) + \frac{1}{k^2r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[rf^{*}_{\ell}(r)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rg_{\ell}(r))\right]\right].\end{aligned}$$

借助上述公式, 有

$$a_\pm(\ell,m)\mathrm{j}_\ell(kr)=\int[\overrightarrow{X}_{\ell'm'}]^*\cdot\overrightarrow{E}\mathrm{d}\Omega$$
$$=\int\frac{(\ell_\mp\mathrm{Y}_{\ell m})^*}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}\mathrm{d}\Omega=\frac{\sqrt{(\ell\pm m)(\ell\mp m+1)}}{\ell(\ell+1)}\int\mathrm{Y}^*_{\ell m\mp1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}\mathrm{d}\Omega.$$

利用 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}$ 的展开式 (12.5) 可以得到

$$a_\pm(\ell,m)=\mathrm{i}^\ell\sqrt{4\pi(2\ell+1)}\delta_{m,\pm1},$$
$$b_\pm(\ell,m)=\mp\mathrm{i}\alpha_\pm(\ell,m).$$

代入到展开式 (12.7), 则沿 z 方向传播的圆极化单色平面电磁波有展开式

$$\overrightarrow{E}_{\mathrm{inc}}(\overrightarrow{x})=\sum_\ell\mathrm{i}^\ell\left[\mathrm{j}_\ell(kr)\overrightarrow{X}_{\ell,\pm1}\pm\frac{1}{k}\overrightarrow{\nabla}\times\mathrm{j}_\ell(kr)\overrightarrow{X}_{\ell,\pm1}\right],\tag{12.8}$$

$$\overrightarrow{H}_{\mathrm{inc}}(\overrightarrow{x})=\sum_\ell\mathrm{i}^\ell\left[\mp\mathrm{i}\mathrm{j}_\ell(kr)\overrightarrow{X}_{\ell,\pm1}+\frac{-\mathrm{i}}{k}\overrightarrow{\nabla}\times\mathrm{j}_\ell(kr)\overrightarrow{X}_{\ell,\pm1}\right],\tag{12.9}$$

其中 $m=\pm1$ 的意义是清楚的, 因为一个光子的自旋沿传播方向的投影为 ±1.

当平面电磁波入射到金属球上, 则在金属球外的电磁场是入射波和散射波的叠加

$$\overrightarrow{E}=\overrightarrow{E}_{\mathrm{inc}}+\overrightarrow{E}_{\mathrm{sc}},$$
$$\overrightarrow{H}=\overrightarrow{H}_{\mathrm{inc}}+\overrightarrow{H}_{\mathrm{sc}}.$$

因为散射波在无穷远处为出射波, 所以它们可以展开为

$$\overrightarrow{E}_{\mathrm{sc}}=\frac{1}{2}\sum_\ell\mathrm{i}^\ell\sqrt{4\pi(2\ell+1)}\left[\alpha_\pm(\ell)\mathrm{h}^1_\ell(kr)\overrightarrow{X}_{\ell,\pm1}\pm\frac{\beta_\pm(\ell)}{k}\overrightarrow{\nabla}\times\mathrm{h}^1_\ell(kr)\overrightarrow{X}_{\ell,\pm1}\right],$$
$$\overrightarrow{H}_{\mathrm{sc}}=\frac{1}{2}\sum_\ell\mathrm{i}^\ell\sqrt{4\pi(2\ell+1)}\left[\pm\mathrm{i}\beta_\pm(\ell)\mathrm{h}^1_\ell(kr)\overrightarrow{X}_{\ell,\pm1}+\frac{-\mathrm{i}\alpha_\pm(\ell)}{k}\overrightarrow{\nabla}\times\mathrm{h}^1_\ell(kr)\overrightarrow{X}_{\ell,\pm1}\right],\tag{12.10}$$

其中系数 $\alpha_\pm(\ell)$ 和 $\beta_\pm(\ell)$ 由在金属球表面的边界条件确定. 由于这里的球对称性, 展开式中对 m 的求和变为 $m=\pm1$.

在半径为 a 的金属球表面, 散射功率为由散射场给出的 Pointing 矢量的朝外分量对球表面的积分, 而吸收功率是总的电磁场给出的 Pointing 矢量的朝内分量对球表面的积分, 它们可以表示为

$$P_{\mathrm{sc}}=-\frac{ca^2}{8\pi}\mathrm{Re}\int\overrightarrow{E}_{\mathrm{sc}}\cdot(\overrightarrow{n}\times\overrightarrow{H}^*_{\mathrm{sc}})\mathrm{d}\Omega,$$

$$P_{\rm abs} = \frac{ca^2}{8\pi}{\rm Re}\int \vec{E}\cdot(\vec{n}\times\vec{H}^*){\rm d}\Omega,$$

其中 $\vec{n}$ 是金属球表面的外法线方向.

令 $f_\ell(r)$ 表示满足方程

$$\left(\frac{{\rm d}^2}{{\rm d}r^2}+\frac{2}{r}\frac{\rm d}{{\rm d}r}+k^2-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right)f_\ell(r)=0$$

的任何种类解的一个, 则有

$$\vec{\nabla}\times f_\ell(r)\vec{X}_{\ell m}=\frac{{\rm i}\vec{n}\sqrt{\ell(\ell+1)}}{r}f_\ell(r){\rm Y}_{\ell m}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[rf_\ell(r)]\vec{n}\times\vec{X}_{\ell m}.$$

再借助矢量球谐函数的正交归一性及 ${\rm j}_\ell$ 和 ${\rm h}_\ell^1$ 的朗斯基关系式

$$W({\rm j}_\ell(x),{\rm h}_\ell^1(x))=\frac{1}{x^2},$$

可以得到总散射截面, 总吸收截面和总截面分别为

$$\sigma_{\rm sc}=\frac{\pi}{2k^2}\sum_\ell(2\ell+1)[|\alpha(\ell)|^2+|\beta(\ell)|^2],$$

$$\sigma_{\rm abs}=\frac{\pi}{2k^2}\sum_\ell(2\ell+1)[2-|\alpha(\ell)+1|^2-|\beta(\ell)+1|^2],$$

$$\sigma_{\rm t}=-\frac{\pi}{k^2}\sum_\ell(2\ell+1){\rm Re}[\alpha(\ell)+\beta(\ell)].$$

对于圆极化为 $(\vec{e}_x\pm{\rm i}\vec{e}_y)$ 的入射波, 微分散射截面为

$$\frac{{\rm d}\sigma_{\rm sc}}{{\rm d}\Omega}=\frac{\pi}{2k^2}|\sum_\ell\sqrt{(2\ell+1)}[\alpha_\pm(\ell)\vec{X}_{\ell\pm1}\pm{\rm i}\beta_\pm(\ell)\vec{n}\times\vec{X}_{\ell\pm1}]|^2. \tag{12.11}$$

一般情况下散射波是椭圆极化的. 只有在对所有的 ℓ 都有关系式 $\alpha_\pm(\ell)=\beta_\pm(\ell)$ 时散射波才是圆极化的.

为了利用金属球表面的边界条件, 与球面相切的总电场为

$$\begin{aligned}\vec{E}_{\rm tan}=&\sum_\ell{\rm i}^\ell\sqrt{4\pi(2\ell+1)}\left\{\left[{\rm j}_\ell+\frac{\alpha_\pm(\ell)}{2}{\rm h}_\ell^{(1)}\right]\vec{X}_{\ell,\pm1}\right.\\&\left.\pm\frac{\rm d}{x{\rm d}x}\left[x({\rm j}_\ell+\frac{\beta_\pm(\ell)}{2}{\rm h}_\ell^{(1)}]\vec{n}\times\vec{X}_{\ell,\pm1}\right]\right\}\end{aligned}$$

如果金属球是理想导体, 则在金属球表面有 $\vec{E}_{\rm tan}=0$, 由此可得

$${\rm j}_\ell+\frac{\alpha_\pm(\ell)}{2}{\rm h}_\ell^{(1)}=0, \tag{12.12}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x(\mathrm{j}_\ell+\frac{\beta_\pm(\ell)}{2}\mathrm{h}_\ell^{(1)}\right]=0.\tag{12.13}$$

由式 (12.12) 可得

$$\alpha_\pm(\ell)+1=-\frac{\mathrm{h}_\ell^2}{\mathrm{h}_\ell^1},$$

所以

$$\alpha_\pm(\ell)=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\delta_\ell}-1.$$

由式 (12.13) 可得

$$\beta_\pm(\ell)+1=-\frac{\dfrac{\mathrm{d}(x\mathrm{h}_\ell^2(x))}{\mathrm{d}x}}{\dfrac{\mathrm{d}(x\mathrm{h}_\ell^1(x))}{\mathrm{d}x}},$$

所以

$$\beta_\pm(\ell)=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\delta'_\ell}-1.$$

由此可得

$$\tan\delta_\ell=\frac{\mathrm{j}_\ell(ka)}{\mathrm{n}_\ell(ka)},$$

$$\tan\delta'_\ell=\left[\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\mathrm{j}_\ell(x))}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\mathrm{n}_\ell(x))}\right]_{x=ka}.$$

如果 $ka\ll 1$, 则有

$$\alpha_\pm(\ell)=\frac{2\mathrm{i}(ka)^{2\ell}}{(2\ell+1)[(2\ell-1)!!]^2},$$

$$\beta_\pm(\ell)=\frac{2\mathrm{i}(ka)^{2\ell}}{(2\ell+1)[(2\ell-1)!!]^2}\frac{-(\ell+1)}{\ell};$$

如果 $ka\gg 1$, 则有

$$\alpha_\pm(\ell)\approx(-1)^\ell\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}ka}-1,$$

$$\beta_\pm(\ell)=-\alpha_\pm(\ell).$$

现在讨论 $ka\ll 1,\ell=1$ 的情况

$$\alpha_\pm(1)=-\frac{1}{2}\beta_\pm(1)=-\frac{2\mathrm{i}}{3}(ka)^3,$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{sc}}}{\mathrm{d}\varOmega}=\frac{2\pi}{3}a^2(ka)^4|\vec{X}_{1,\pm1}\mp 2\mathrm{i}\vec{n}\times\vec{X}_{1,\pm1}|^2,$$

$$|\vec{X}_{1,\pm1}|^2=|\vec{n}\times\vec{X}_{1,\pm1}|^2=\frac{3}{16\pi}(1+\cos^2\theta)$$

$$\pm \mathrm{i}(\vec{n} \times \vec{X}_{1,\pm 1})^* \cdot \vec{X}_{1,\pm 1} = \frac{-3}{8\pi}\cos\theta.$$

最终得到

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{sc}}}{\mathrm{d}\Omega} = a^2(ka)^4\left[\frac{5}{8}(1+\cos^2\theta) - \cos\theta\right].$$

与由金属球的诱导电偶极矩和磁偶极矩得到的公式 (12.2) 完全相同.

12.3 几何光学和电磁波的衍射

假定电磁波的振幅为 $f = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$, 它满足自由波动方程

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) f = 0 \quad \left(\text{或者}\frac{\partial^2 f}{\partial x_\mu^2} = 0\right).$$

已经知道, 对单色平面波 $A=$ 常数, 即 $\psi = \mathrm{i}\vec{k} \cdot \vec{r} - \mathrm{i}\omega t$. 对于一般情况没有这种简单关系. 但当波长 λ 很小时, 振幅 A 是空间和时间的缓慢变化函数, 而相位 ψ(称为程函) 是一个很大的量 (小 λ 意味着空间或时间的很小变化 ψ 将改变 2π).

对 ψ 作泰勒展开

$$\psi(\vec{r}, t) \approx \psi_0 + \vec{r} \cdot \vec{\nabla}\psi + t\frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

令 $\vec{k} = \vec{\nabla}\psi, \omega = -\dfrac{\partial \psi}{\partial t}$ 则

$$k_\mu = \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} = \begin{pmatrix} \vec{k} \\ \mathrm{i}\frac{\omega}{c} \end{pmatrix},$$

由平面波条件 $k_\mu k_\mu = 0$, 可得

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu}\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} = 0,$$

此即几何光学的程函方程.

此程函方程也可由 f 满足的波动方程得到

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x_\mu^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} + 2\mathrm{i}\frac{\partial A}{\partial x_\mu}\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} + \mathrm{i}f\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_\mu^2} - f\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu}\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} = 0,$$

因在 λ 很小时, A 是空间和时间的缓慢变化函数而相位 ψ 是一个很大的量, 所以与第四项相比前三项可略去, 即得到程函方程.

这里我们将力学中的粒子运动方程与光束方程作比较:

力学 $\quad \vec{p} = \dfrac{\partial S}{\partial \vec{r}}, \quad h = -\dfrac{\partial S}{\partial t},$

光束　$\vec{k} = \vec{\nabla}\psi, \quad \omega = -\dfrac{\partial\psi}{\partial t},$

由此可知力学中的作用量 S 与几何光学的程函 ψ 相对应.

类比力学中粒子的运动方程

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial h}{\partial \vec{r}}, \quad \dot{\vec{r}} = \frac{\partial h}{\partial \vec{p}},$$

可得光束在 $\lambda \to 0$ 时的运动方程

$$\dot{\vec{k}} = -\frac{\partial \omega}{\partial \vec{r}}, \quad \dot{\vec{r}} = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}}.$$

因在真空中 $\omega = kc$, 得 $\vec{V} = c\vec{n}$, 即光束在真空中以光速 c 做直线传播.

对于有确定频率 ω 的光束, 程函为 $\psi = -\omega t + \psi_0(x,y,z)$. 程函方程变为

$$(\vec{\nabla}\psi_0)^2 = \text{常数}.$$

当 $\lambda \neq 0$ 时, 光束直线传播不再正确, 光的波动性将表现出来, 即出现光的衍射现象. 下面导出基尔霍夫公式, 它是讨论衍射问题的基本公式.

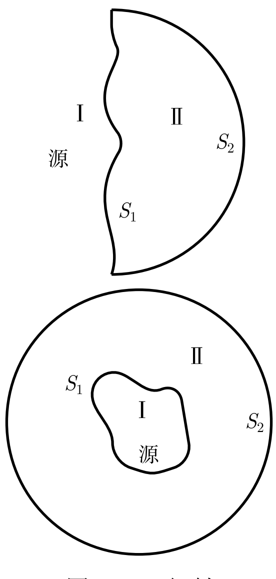


图 12.2　衍射

(a) $(\nabla'^2 + k^2)u(\vec{r'}) = 0$;

(b) $(\nabla'^2 + k^2)G(\vec{r}, \vec{r'}) = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r'})$.

计算表达式 $\displaystyle\int_V (G(\vec{r}, \vec{r'}) \times (a) - u(\vec{r'}) \times (b))\mathrm{d}\vec{r'}$, 其中 V 是由曲面 S_1 和 S_2 包

围的区域 II (图 12.2), 格林函数 $G(\vec{r},\vec{r'})=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\vec{r}-\vec{r'}|}}{|\vec{r}-\vec{r'}\,|}$ 满足在无穷远处 (S_2 上) 是出射波的边界条件.

$$\begin{aligned}
\text{左边}&=\int_V(G(\vec{r},\vec{r'})(\nabla'^2+k^2)u(\vec{r'})-u(\vec{r'})(\nabla'^2+k^2)G(\vec{r},\vec{r'}))\mathrm{d}\vec{r'}\\
&=\int_V(G(\vec{r},\vec{r'})\ (\nabla'^2)u(\vec{r'})-u(\vec{r'})(\nabla'^2)G(\vec{r},\vec{r'}))\mathrm{d}\vec{r'}\\
&=-\int_{S_1+S_2}(G(\vec{r},\vec{r'})\ \vec{n'}\cdot(\vec{\nabla'}u(\vec{r'})-u(\vec{r'})\vec{\nabla'}G(\vec{r},\vec{r'}))\mathrm{d}S',
\end{aligned}$$

其中用了格林定理, $\vec{n'}$ 是区域 II 的表面的内单位法线.

$$\text{右边}=4\pi\int\delta(\vec{r}-\vec{r'})u(\vec{r'})\mathrm{d}\vec{r'}=4\pi u(\vec{r}).$$

所以可得

$$u(\vec{r})=-\frac{1}{4\pi}\int_{S_1+S_2}G(\vec{r},\vec{r'})\ \vec{n'}\cdot\{\vec{\nabla'}u(\vec{r'})-u(\vec{r'})\vec{\nabla'}G(\vec{r},\vec{r'})\}\mathrm{d}S',\qquad(12.14)$$

因在区域 II 中的场 $u(\vec{r})$ 是通过表面 S_1 传播过来的, 所以 $u(\vec{r})$ 在 S_2 表面上是出射波, 即

$$u\to f(\theta,\varphi)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r},\quad \frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\to\mathrm{i}k-\frac{1}{r},$$

所以

$$\int_{S_2}G(\vec{r},\vec{r'})\ \vec{n'}\cdot\{\vec{\nabla'}u(\vec{r'})-u(\vec{r'})\vec{\nabla'}G(\vec{r},\vec{r'})\}\mathrm{d}S'\to 0.$$

最终得到基尔霍夫公式

$$u(\vec{r})=-\frac{1}{4\pi}\int_{S_1}G(\vec{r},\vec{r'})\ \vec{n'}\cdot\{\vec{\nabla'}u(\vec{r'})-u(\vec{r'})\vec{\nabla'}G(\vec{r},\vec{r'})\}\mathrm{d}S',\qquad(12.15)$$

其中 $\vec{n'}$ 是表面 S_1 的单位法线 (从区域 I 到区域 II).

在实际的衍射问题中 S_1 通常是有一小开孔 (线性尺寸为 d) 的屏障, 在利用基尔霍夫公式积分时, 假定在屏障上 u 和 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}$ 的值为零, 在开孔上它们的值和没有屏障时相同.

因为 $G(\vec{r},\vec{r'})=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R},R=|\vec{r}-\vec{r'}|$, 所以有

$$kR=kr-k\vec{n}\cdot\vec{r'}+\frac{k}{2r}(r'^2-(\vec{n}\cdot\vec{r'})^2)+\cdots,$$

在此表达式中, 如果可略去第三项和更高阶的项, 即取 $kR=kr-k\vec{n}\cdot\vec{r'}(kd\ll 1,d\ll r)$, 此时称为 Faunholfer 衍射. 如果必须保留第三项和更高阶的项, 称为 Fresnel 衍射.

下面给出平面波入射时 Faunholfer 小孔衍射公式.

沿 x 方向传播的入射平面波为 $u=u_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$, 有

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\mathrm{i}ku,$$

$$G(\vec{r}-\vec{r'})=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\vec{r}-\vec{r'}|}}{|\vec{r}-\vec{r'}|},$$

$$\vec{\nabla}'G(\vec{r}-\vec{r'})=\mathrm{i}k\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\left(1+\frac{\mathrm{i}}{kR}\right)\left(-\frac{\vec{R}}{R}\right)\approx-\mathrm{i}kG\vec{n},$$

$$G(\vec{r},\vec{r'})\frac{\partial}{\partial n'}u(\vec{r'})=\mathrm{i}kuG,$$

$$-u(\vec{r'})\ \frac{\partial}{\partial n'}G(\vec{r},\vec{r'})\approx\mathrm{i}kuG.$$

代入到基尔霍夫公式 (12.15) 可得

$$\begin{aligned}u(\vec{r})&=-\frac{1}{4\pi}\int_{S_1}\left(G(\vec{r},\vec{r'})\frac{\partial}{\partial n'}u(\vec{r'})-u(\vec{r'})\ \frac{\partial}{\partial n'}G(\vec{r},\vec{r'})\right)\mathrm{d}\vec{S}\\&\approx-\frac{2\mathrm{i}k}{4\pi}\int_{S_1}u\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\mathrm{d}S.\end{aligned}$$

由此得到

$$u(\vec{r})=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{S_1}ku\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\mathrm{d}f_n,$$

其中 S_1 是屏障上的小开孔.

12.4 电磁波散射的光学定理

对于电磁波在任意散射体上的散射 (图 12.3), 有

$$\vec{E}=\vec{E}_{\mathrm{inc}}+\vec{E}_{\mathrm{sc}},$$

$$\vec{H}=\vec{H}_{\mathrm{inc}}+\vec{H}_{\mathrm{sc}}.$$

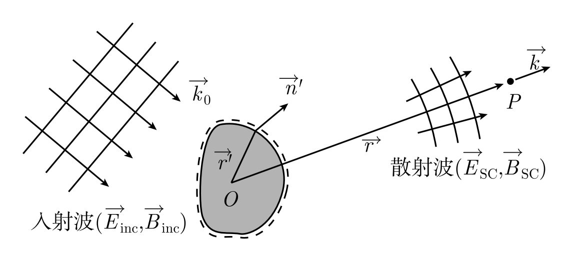


图 12.3 电磁波的散射

对于 $\vec{E}(\vec{r})$ 的每一个直角分量式 (12.14) 成立, 所以有

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi}\oint_S[\vec{E}(\vec{n}'\cdot\vec{\nabla}'G)-G(\vec{n}'\cdot\vec{\nabla}')\vec{E}]\mathrm{d}S, \tag{12.16}$$

其中 $S=S_1+S_2$, S_1 是散射体的表面, S_2 是无限远处的球面. S 所围成的体积为 V, 点 $\vec{r}$ 在 V 中.

在上式中 $\vec{r}=\vec{r}'$ 是奇点, 若假想 S 还包括围绕 $\vec{r}$ 点的内表面 S', 即在 V 中挖去了 $\vec{r}$ 点, 则被积函数在中没有奇点, 且有关系式

$$0=\frac{1}{4\pi}\oint_S\left[2\vec{E}(\vec{n}'\cdot\vec{\nabla}'G)-\vec{n}'\cdot\vec{\nabla}'(G\vec{E})\right]\mathrm{d}S,$$

对上式的第二项用高斯定理, 则可得到

$$0=\frac{1}{4\pi}\oint_S[2\vec{E}(\vec{n}'\cdot\vec{\nabla}'G)\mathrm{d}S+\int_V\nabla'^2(G\vec{E})\mathrm{d}V.$$

借助恒等式

$$\nabla^2\vec{A}=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})-\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}),$$

有

$$0=\frac{1}{4\pi}\oint_S[2\vec{E}(\vec{n}'\cdot\vec{\nabla}'G)-\vec{n}'(\vec{\nabla}'\cdot(G\vec{E}))+\vec{n}'\times(\vec{\nabla}'\times(G\vec{E}))]\mathrm{d}S,$$

再利用

$$\vec{\nabla}'\cdot\vec{E}=0,\quad \vec{\nabla}'\times\vec{E}=\mathrm{i}k\vec{H},$$

则有

$$\begin{aligned}0=&\frac{1}{4\pi}\oint_S[\mathrm{i}k(\vec{n'}\times\vec{H})G+2\vec{E}(\vec{n}'\cdot\vec{\nabla}'G)\\&-\vec{n}'(\vec{E}\cdot\vec{\nabla}'G)+\vec{n}'\times(\vec{\nabla}'G\times\vec{E})]\mathrm{d}S.\end{aligned}$$

这时将 S 中包围 $\vec{r}$ 点的内表面 S' 去掉, 则可以得到

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi}\oint_S[\mathrm{i}k(\vec{n'}\times\vec{H})G+(\vec{n'}\times\vec{E})\times\vec{\nabla}'G+(\vec{n'}\cdot\vec{E})\vec{\nabla}'G]\mathrm{d}S. \tag{12.17}$$

在上式中利用代换 $\vec{E}\to\vec{H}$ 和 $\vec{H}\to-\vec{E}$ 可得 $\vec{H}$ 的表达式.

因为在表面 S_2 上有

$$G\to\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr'}}{r'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\vec{n}'\cdot\vec{r}},\quad \vec{\nabla}'G\to-\mathrm{i}k\vec{n}'G,$$

所以在表面 S_2 上积分的贡献为

$$\begin{aligned}\oint_{S_2} &= \mathrm{i}k\oint_{S_2}[\vec{n}'\times\vec{H}-(\vec{n}'\times\vec{E})\times\vec{n}'-\vec{n}'(\vec{n}'\cdot\vec{E})]G\mathrm{d}S\\ &= \mathrm{i}k\oint_{S_2}[\vec{n}'\times\vec{H}-\vec{E}]G\mathrm{d}S=0.\end{aligned}$$

由式 (12.17) 可以得到矢量的基尔霍夫公式

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi}\oint_{S_1}[\mathrm{i}k(\vec{n'}\times\vec{H})G+(\vec{n'}\times\vec{E})\times\vec{\nabla}'G+(\vec{n'}\cdot\vec{E})\vec{\nabla}'G]\mathrm{d}S. \tag{12.18}$$

下面将矢量的基尔霍夫公式用于散射的情况 $r\to\infty$, 则有

$$G(\vec{r},\vec{r}')\to\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}'},\quad \vec{E}_{\mathrm{sc}}\to\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\vec{F}(\vec{k},\vec{k}_0),$$

其中

$$\begin{aligned}&\vec{F}(\vec{k},\vec{k}_0)\\ =&\frac{\mathrm{i}}{4\pi}\oint_{S_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}'}[k(\vec{n'}\times\vec{H}_{\mathrm{sc}})+\vec{k}\times(\vec{n'}\times\vec{E}_{\mathrm{sc}})-\vec{k}(\vec{n'}\cdot\vec{E}_{\mathrm{sc}})]\mathrm{d}S\\ =&\frac{1}{4\pi i}\vec{k}\times\oint_{S_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}'}[\vec{e}_k\times(\vec{n'}\times\vec{H}_{\mathrm{sc}})-\vec{n'}\times\vec{E}_{\mathrm{sc}}]\mathrm{d}S.\end{aligned}$$

散射波的波矢量为 $\vec{k}$ 单位极化矢量为 $\vec{e}_{\lambda'}$ 的散射振幅为

$$\begin{aligned}&\vec{e}^{\,*}_{\lambda'}\cdot\vec{F}(\vec{k},\vec{k}_0)\\ =&\frac{\mathrm{i}}{4\pi}\oint_{S_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}'}[k\vec{e}^{\,*}_{\lambda'}\cdot(\vec{n'}\times\vec{H}_{\mathrm{sc}})+\vec{e}^{\,*}_{\lambda'}\cdot(\vec{k}\times(\vec{n}'\times\vec{E}_{\mathrm{sc}}))]\mathrm{d}S.\end{aligned} \tag{12.19}$$

吸收功率的时间平均可表示为

$$P_{\mathrm{abs}}=-\frac{c}{8\pi}\oint_{S_1}\mathrm{Re}(\vec{E}\times\vec{H}^*)\cdot\vec{n}'\mathrm{d}S.$$

散射功率的时间平均为

$$P_{\mathrm{sc}}=\frac{c}{8\pi}\oint_{S_1}\mathrm{Re}(\vec{E}_{\mathrm{sc}}\times\vec{H}^*_{\mathrm{sc}})\cdot\vec{n}'\mathrm{d}S.$$

总功率是吸收功率和散射功率之和

$$P=-\frac{c}{8\pi}\oint_{S_1}\mathrm{Re}(\vec{E}_{\mathrm{sc}}\times\vec{H}^*_{\mathrm{inc}}+\vec{E}^*_{\mathrm{inc}}\times\vec{H}_{\mathrm{sc}})\cdot\vec{n}'\mathrm{d}S,$$

$$\vec{E}_{\mathrm{inc}}=\widehat{e}_\lambda E_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}_0\cdot\vec{r}},$$

$$\overrightarrow{H}_{\text{inc}} = \frac{1}{k_0}\overrightarrow{k}_0 \times \overrightarrow{E}_{\text{inc}},$$

$$\overline{S}_{\text{inc}} = \frac{c}{8\pi}|E_0|^2,$$

$$P = -\frac{c}{8\pi k}\text{Re}\left[E_0^* \oint_{S_1} \text{e}^{-\text{i}\overrightarrow{k}_0\cdot\overrightarrow{r}'}[k\overrightarrow{e}_\lambda^* \cdot (\overrightarrow{n}' \times \overrightarrow{H}_\text{s}) + \overrightarrow{e}_\lambda^* \cdot (\overrightarrow{k}_0 \times (\overrightarrow{n}' \times \overrightarrow{E}_\text{s}))]\right] \text{d}S.$$

总有效散射截面

$$\sigma_\text{t} = \frac{P}{S_{\text{inc}}} = -\frac{1}{k}\text{Re}\left[E_0^{-1} \oint_{S_1} \text{e}^{-\text{i}\overrightarrow{k}_0\cdot\overrightarrow{r}'}[k\overrightarrow{e}_\lambda^* \cdot (\overrightarrow{n}' \times \overrightarrow{H}_\text{s}) + \overrightarrow{e}_\lambda^* \cdot (\overrightarrow{k}_0 \times (\overrightarrow{n}' \times \overrightarrow{E}_\text{s}))]\right] \text{d}S.$$

与式 (12.19) 比较, 有

$$\sigma_\text{t} = \frac{4\pi}{k}\text{Im}\frac{\overrightarrow{e}_\lambda^* \cdot \overrightarrow{F}(\overrightarrow{k} = \overrightarrow{k}_0)}{E_0}.$$

令

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{k}_0) = \frac{\overrightarrow{F}(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{k}_0)}{E_0},$$

最终得到电磁波在任意形状障碍物上散射的光学定理

$$\sigma_\text{t} = \frac{4\pi}{k}\text{Im}[\widehat{e}_\lambda^* \cdot \overrightarrow{f}(\overrightarrow{k} = \overrightarrow{k}_0)]. \tag{12.20}$$

12.5 例 题

例题 12.1 一单色平面波入射到半径为 R ($\lambda \gg R$) 介电常数为 ε 的小球上, 求有效散射截面的角分布和总有效散射截面并讨论散射波的极化.

解 由于 $\lambda \gg R$, 在电介质球范围内电场可视为均匀的, 由例题 8.1 可知在均匀电场的作用下电介质球产生总诱导电偶极矩

$$\overrightarrow{d} = \frac{(\varepsilon - 1)R^3}{\varepsilon + 2}\overrightarrow{E}_{\text{inc}},$$

其中 $\overrightarrow{E}_{\text{inc}} = \overrightarrow{e}_\lambda E_0 \text{e}^{\text{i}k\overrightarrow{n}_0\cdot\overrightarrow{r} - \text{i}\omega t}$, $\overrightarrow{e}_\lambda$ 表示入射波的单位极化矢量.

此随时间变化的诱导电偶极矩产生的辐射场为

$$\overrightarrow{H}_{\text{sc}}(\overrightarrow{r}, t) = \frac{1}{c^2 r}\ddot{\overrightarrow{d}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \times \overrightarrow{n},$$

$$\overrightarrow{E}_{\text{sc}}(\overrightarrow{r}, t) = \overrightarrow{H}(\overrightarrow{r}, t) \times \overrightarrow{n}.$$

由此可得有效散射截面为

$$\frac{\text{d}\sigma}{\text{d}\Omega} = k^4\left(\frac{(\varepsilon - 1)R^3}{\varepsilon + 2}\right)^2 (\overrightarrow{e}_\lambda \cdot \overrightarrow{e}_{\lambda_{\text{sc}}})^2,$$

其中 $\vec{e}_{\lambda_{\rm sc}}$ 是散射波的单位极化矢量.

入射波的传播方向 $\vec{n}_0$ 和散射波的传播方向 $\vec{n}$ 确定散射平面, 令散射角为 θ. 已知 $\vec{e}_\lambda \perp \vec{n}_0$, 而 $\vec{e}_{\lambda_{\rm sc}}$ 可垂直于散射平面也可在散射平面上. 如果 $\vec{e}_{\lambda_{\rm sc}} = \vec{e}_{/\!/}$, 即在散射平面上, 对入射波的极化 λ 求平均

$$\overline{(\vec{e}_\lambda \cdot \vec{e}_{\lambda_{\rm sc}})^2} = \frac{1}{2}\sum_{\lambda=1,2} e_\lambda^\alpha e_\lambda^\beta e_{/\!/}^\alpha e_{/\!/}^\beta$$
$$= \frac{1}{2}(\delta_{\alpha\beta} - n_0^\alpha n_0^\beta) e_{/\!/}^\alpha e_{/\!/}^\beta = \frac{1}{2}\cos^2\theta,$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{/\!/}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{2}k^4\left(\frac{(\varepsilon-1)R^3}{\varepsilon+2}\right)^2\cos^2\theta.$$

如果 $\vec{e}_{\lambda_{\rm sc}} = \vec{e}_\perp$, 即垂直于散射平面, 则有

$$\overline{(\vec{e}_{\lambda_i} \cdot \vec{e}_{\lambda_{\rm sc}})^2} = \frac{1}{2}\sum_{\lambda=1,2} e_\lambda^\alpha e_\lambda^\beta e_{/\!/}^\alpha e_{/\!/}^\beta = \frac{1}{2}(\delta_{\alpha\beta} - n_0^\alpha n_0^\beta) e_{/\!/}^\alpha e_{/\!/}^\beta = \frac{1}{2},$$

可得

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_\perp}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{2}k^4\left(\frac{(\varepsilon-1)R^3}{\varepsilon+2}\right)^2.$$

所以对入射波的极化取平均以后可得散射波的总有效散射截面的角分布为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\mathrm{d}\sigma_{/\!/}}{\mathrm{d}\Omega} + \frac{\mathrm{d}\sigma_\perp}{\mathrm{d}\Omega} = k^4\left(\frac{(\varepsilon-1)R^3}{\varepsilon+2}\right)^2\frac{1}{2}(1+\cos^2\theta).$$

散射波的极化

$$\Pi(\theta) = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\sigma_{/\!/}}{\mathrm{d}\Omega} - \dfrac{\mathrm{d}\sigma_\perp}{\mathrm{d}\Omega}}{\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}} = \frac{\sin^2\theta}{1+\cos^2\theta},$$

即对非极化的入射波可得到极化的散射波.

总有效散射截面

$$\sigma = \int \mathrm{d}\Omega k^4\left(\frac{(\varepsilon-1)R^3}{\varepsilon+2}\right)^2\frac{1}{2}(1+\cos^2\theta) = \frac{8\pi}{3}k^4\left(\frac{(\varepsilon-1)R^3}{\varepsilon+2}\right)^2.$$

例题 12.2 沿 x 方向传播正入射平面波为 $u = u_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$, 在 yz 平面屏幕 $z=0$ 的 y 轴上有狭缝 $(-a, a)$, 计算此狭缝的衍射.

解 因只有在 y 轴狭缝 $(-a, a)$ 处, 光强不为零. 则在 $x>0$, 不可能是绝对沿 x 方向传播的平面波 (有 y 分量), 所以有

$$u_q = u_0\int_{-a}^{a}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qy}\mathrm{d}y = \frac{2u_0}{q}\sin(qa).$$

又因为屏幕两边都是真空 $\overrightarrow{q}=\overrightarrow{k}'-\overrightarrow{k},|\overrightarrow{k}|=|\overrightarrow{k}|=k=\dfrac{\omega}{c}$, 得 $q\approx k\theta$. 则衍射强度

$$\mathrm{d}I\propto\frac{\sin^2(ka\theta)}{(ka\vartheta)^2}\mathrm{d}\theta.$$

例题 12.3　对于沿 z 方向入射的圆极化单色平面波在理想导体球上的散射, 散射波的表达式为

$$\overrightarrow{E}_{\mathrm{sc}}=\frac{1}{2}\sum_{\ell}\mathrm{i}^{\ell}\sqrt{4\pi(2\ell+1)}[\alpha_{\pm}(\ell)\mathrm{h}_{\ell}^{1}(kr)\overrightarrow{X}_{\ell,\pm1}\pm\frac{\beta_{\pm}(\ell)}{k}\overrightarrow{\nabla}\times\mathrm{h}_{\ell}^{1}(kr)\overrightarrow{X}_{\ell,\pm1}].$$

利用光学定理 $\sigma_{\mathrm{t}}=\dfrac{4\pi}{k}\overrightarrow{e}_0^{*}\cdot\overrightarrow{f}(\overrightarrow{n}=\overrightarrow{e}_0)$. 试证明

$$\sigma_{\mathrm{t}}=-\frac{\pi}{k^2}\sum_{\ell}(2\ell+1)\mathrm{Re}[\alpha(\ell)+\beta(\ell)].$$

解　利用公式

$$\mathrm{Y}_{\ell m}(\theta=0)=\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\delta_{m,0},$$

$$\overrightarrow{\nabla}\times\mathrm{h}_{\ell}^{1}(kr)\overrightarrow{X}_{\ell m}=\frac{\mathrm{i}\overrightarrow{n}\sqrt{\ell(\ell+1)}}{r}\mathrm{h}_{\ell}^{1}(kr)\mathrm{Y}_{\ell m}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[r\mathrm{h}_{\ell}^{1}(kr)]\overrightarrow{n}\times\overrightarrow{X}_{\ell m},$$

因为当 $r\to\infty$ 时,

$$\mathrm{h}_{\ell}^{1}(kr)\to(-\mathrm{i})^{\ell+1}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{kr},$$

$$\overrightarrow{E}_{\mathrm{sc}}\to\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\overrightarrow{F}(\overrightarrow{n},\overrightarrow{e}_z).$$

下面计算 $(\overrightarrow{e}_x+\mathrm{i}\overrightarrow{e}_y)^{*}\cdot\overrightarrow{E}_{\mathrm{sc}}$:

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{e}_x+\mathrm{i}\overrightarrow{e}_y)^{*}\cdot\overrightarrow{X}_{\ell1}&=(\overrightarrow{e}_x-\mathrm{i}\overrightarrow{e}_y)\cdot\frac{(\overrightarrow{e}_xL_x+\overrightarrow{e}_yL_y+\overrightarrow{e}_zL_z)\mathrm{Y}_{\ell1}}{\sqrt{(\ell\ell+1)}}\\&=\frac{(L_x-\mathrm{i}L_y)\mathrm{Y}_{\ell1}}{\sqrt{(\ell\ell+1)}}=\mathrm{Y}_{\ell0}(\theta=0)=\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}},\end{aligned}$$

$$(\overrightarrow{e}_x+\mathrm{i}\overrightarrow{e}_y)^{*}\cdot\overrightarrow{X}_{\ell-1}=\frac{(L_x-\mathrm{i}L_y)Y_{\ell-1}}{\sqrt{(\ell\ell+1)}}=0,$$

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{e}_x+\mathrm{i}\overrightarrow{e}_y)^{*}\cdot(\overrightarrow{e}_z\times\overrightarrow{X}_{\ell1})&=(\overrightarrow{e}_x-\mathrm{i}\overrightarrow{e}_y)\cdot\frac{(\overrightarrow{e}_yL_x-\overrightarrow{e}_xL_y)\mathrm{Y}_{\ell1}}{\sqrt{(\ell\ell+1)}}\\&=-\mathrm{i}\frac{(L_x-\mathrm{i}L_y)\mathrm{Y}_{\ell1}}{\sqrt{(\ell\ell+1)}}=-\mathrm{i}\mathrm{Y}_{\ell0}(\theta=0)=-\mathrm{i}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}},\end{aligned}$$

$$(\vec{e}_x + \mathrm{i}\,\vec{e}_y)^* \cdot \vec{E}_{\mathrm{sc}} \to \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\left[-\mathrm{i}\frac{1}{2k}\sum_\ell (2\ell+1)(\alpha(\ell)+\beta(\ell))\right],$$

$$(\vec{e}_x + \mathrm{i}\,\vec{e}_y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + \mathrm{i}\,\vec{e}_y)\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + \mathrm{i}\,\vec{e}_y)E_0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + \mathrm{i}\,\vec{e}_y)^* \cdot \vec{E}_{\mathrm{sc}} \to \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\left[-\mathrm{i}\frac{1}{2\sqrt{2}k}\sum_\ell (2\ell+1)(\alpha(\ell)+\beta(\ell))\right],$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + \mathrm{i}\,\vec{e}_y) \cdot \vec{F}(\vec{n} = \vec{e}_z) = \left[-\mathrm{i}\frac{1}{2\sqrt{2}k}\sum_\ell (2\ell+1)(\alpha(\ell)+\beta(\ell))\right],$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + \mathrm{i}\,\vec{e}_y) \cdot \vec{f}(\vec{n} = \vec{e}_z) = \left[-\mathrm{i}\frac{1}{4k}\sum_\ell (2\ell+1)(\alpha(\ell)+\beta(\ell))\right],$$

利用光学定理得到

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{t}} &= \frac{4\pi}{k}\mathrm{Im}\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + \mathrm{i}\,\vec{e}_y) \cdot \vec{f}(\vec{n} = \vec{e}_z)\\ &= -\frac{\pi}{k^2}\sum_\ell (2\ell+1)\mathrm{Re}[\alpha(\ell)+\beta(\ell)].\end{aligned}$$

第 13 章　快速运动带电粒子与物质的相互作用

13.1　快速运动带电粒子与介质相互作用的物理机制

快速运动带电粒子穿过介质时会与介质中的原子发生碰撞, 此快速运动带电粒子在碰撞过程中会产生加速度因而会通过电磁辐射而损失能量, 也可以因为与介质中的原子碰撞直接把能量转移给原子而损失能量. 对于非相对论的带电粒子, 与因碰撞直接转移的能量相比, 由辐射损失的能量可以忽略. 但对于极端相对论性的带电粒子与原子发生碰撞时通过电磁辐射损失能量可能成为主要机制. 这里我们只讨论快速运动带电粒子与介质中的原子碰撞直接把能量转移给原子而损失能量的机制. 当介质足够稀薄时, 二体碰撞是主要的, 即快速运动带电粒子每次只与介质中的一个原子发生碰撞. 当快速运动带电粒子与一个原子碰撞时, 它既与原子中的电子碰撞也与该原子的原子核发生碰撞.

当快速运动入射粒子是比电子重很多的粒子时 (如带电介子、质子、α 粒子等), 则入射粒子与原子中的电子和原子核的碰撞有极为不同的特征. 入射粒子因与原子中的电子碰撞会转移给电子能量而导致介质中原子的激发和电离, 但快速运动入射粒子的轨道几乎不发生偏转; 入射粒子与原子核的碰撞是弹性的, 因而导致入射粒子的轨道发生偏转而几乎无能量损失, 且这种弹性散射主要是集中在小角度, 所以当讨论重的入射带电粒子与原子碰撞时可假定它的轨道是直线.

当入射粒子是电子时, 其能量损失和轨道偏转都主要来自与原子中电子的碰撞. 快速运动入射电子进入介质后很快将失去直线轨道而在介质中扩散.

当介质变得足够稠密时, 则入射带电粒子将与介质中的许多原子同时发生碰撞. 在讨论快速运动带电粒子与介质中的某个原子碰撞时, 其他原子在此带电粒子的作用下将产生诱导电磁场, 而这种诱导电磁场又会对选定的原子的运动产生影响, 此即介质的极化效应.

快速带电粒子与物质的相互作用有着重要和广泛的应用 (如各种材料的辐射损伤等), 对此本章不予讨论. 这里只对快速运动带电粒子与介质相互作用的基本物理机制和处理方法做一简要介绍.

应当指出, 对此问题的严格处理需要以量子力学为基础, 但从经典电动力学出发并借助测不准关系就可得到量子效应的影响.

13.2 快速运动带电粒子通过稀薄介质时的能量损失

假定有一个重的快速运动带电粒子 (电荷为 ze, 质量为 M, 动量的值为 $P = \gamma_1\beta_1 Mc$, 速度的值为 V) 通过介质而与介质中原子的电子 (假定电子静止, 电荷为 $-e$, 质量为 m_e) 发生二体碰撞. 当在重的快速运动带电粒子静止的参照系中讨论此问题时, 如果 $M \gg m_e$, 则可视为是电子在静止电荷 ze 的库仑场中的散射.

对于库仑散射有著名的 Rutherford 散射公式

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{\alpha}{2pv}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\dfrac{\chi}{2}}, \tag{13.1}$$

其中 $\alpha = ze^2$, 而 $p = \gamma\beta m_e c = m_e\gamma_1\beta_1 c$ 和 $v = V$ 分别是电子在此坐标系中的动量和速度的大小. χ 是电子在库仑场中散射的偏转角.

对于非相对论性带电粒子在库仑场中的散射, Rutherford 散射公式对所有的散射角都是正确的, 当偏转角为小角度时, 它对于相对论性带电粒子的散射也是适用的.

将 Rutherford 散射公式表示为洛伦兹变换下不变的形式是方便的

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}Q^2} = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\beta c Q^2}\right)^2, \tag{13.2}$$

其中 Q 是入射电子在碰撞过程中的四动量转移. 所以

$$\begin{aligned} Q^2 &= (p'-p)^2 = p'^2 + p^2 - 2p'\cdot p = -2m_e^2c^2 - 2\left(\vec{p}\,'\cdot\vec{p} - \frac{\varepsilon^2}{c^2}\right) \\ &= 2|\vec{p}|^2(1-\cos\chi) = 4|\vec{p}|^2\sin^2\frac{\chi}{2}, \end{aligned}$$

$$\mathrm{d}Q^2 = 2|\vec{p}|^2\sin\chi\mathrm{d}\chi,$$

而 p 和 p' 分别是电子在碰撞前和碰撞后的四动量.

假定在碰撞前电子静止, 则

$$Q^2 = \vec{p}\,'^2 - \left(\frac{\varepsilon'}{c} - m_e c\right)^2 = 2\varepsilon' m_e - 2m_e^2c^2 = 2m_e T,$$

$$\mathrm{d}Q^2 = 2m_e\mathrm{d}T,$$

其中 $T(=\varepsilon' - m_e c^2)$ 是电子因与快速运动带电粒子碰撞获得的动能 (即快速运动入射粒子损失的能量).

由式 (13.2) 得到

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}T} = \frac{2\pi\alpha^2}{m_e c^2 \beta^2 T^2}, \tag{13.3}$$

此公式的适用范围是 $T_{\min} < T < T_{\max}$.

当 $T_{\min} \approx \varepsilon \gg \hbar\omega_0$ 时 ($\hbar\omega_0$ 是电子在原子中的平均结合能), 则原子中的电子可视为是自由的.

下面讨论如何确定 $T_{\max}$.

快速运动带电粒子的动能为 $E_1 - Mc^2 = Mc^2(\gamma_1 - 1)$, 当它与质量为 m_2 的粒子弹性碰撞时, 此动能的最大转移比例为 $R = \dfrac{2m_2(\gamma_1+1)}{M\left(1+\dfrac{2m_2}{M}\gamma_1\right)}$, 所以

$$T_{\max} = R(E_1 - Mc^2) = Mc^2(\gamma_1 - 1)R.$$

当快速运动重粒子与静止电子碰撞时, 可以得到

$$T_{\max} \approx 2m_e\gamma^2\beta^2c^2,$$

其中略去了 R 的分母与能量有关的项.

如果快速运动的入射粒子是电子, 则 $R = 1$, 由此得到

$$T_{\max} = m_e c^2(\gamma - 1).$$

采用得到的 $T_{\min}$ 和 $T_{\max}$ 的表达式作为对 T 积分的下限和上限, 得到介质的阻止本领 (带电粒子在介质中走单位距离的能量损失) 为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}(T > \varepsilon) &= NZ\int_{\varepsilon}^{T_{\max}} T\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}T}\mathrm{d}T \\ &= 2\pi NZ\frac{\alpha^2}{m_e c^2\beta^2}\left[\ln\left(\frac{2m_e\gamma^2\beta^2c^2}{\varepsilon}\right) - \beta^2\right],\end{aligned} \tag{13.4}$$

其中 N 是单位体积内的原子数目, Z 是一个原子中的电子数目. 方括号中的最后一项 $(-\beta^2)$ 由电子自旋的相对论修正给出.

式 (13.4) 也可借助电子的碰撞参数 b 用经典和半经典的方法得到, 它可以使我们用另外一种方式理解快速运动带电粒子在介质中损失能量的机制.
在重的快速运动带电粒子静止的参照系中

$$b = \frac{\alpha}{pv}\cot\frac{\chi}{2},$$

即电子在库仑场中的碰撞参数 b 与电子的偏转角 χ 有一一对应关系.

由关系式

$$b^2 = \left(\frac{\alpha}{pv}\right)^2 \cot^2 \frac{\chi}{2}$$

可以得到

$$\sin^2 \frac{\chi}{2} = \frac{1}{1 + \cot^2 \frac{\chi}{2}} = \frac{\left(\frac{\alpha}{pv}\right)^2}{b^2 + \left(\frac{\alpha}{pv}\right)^2},$$

$$Q^2 = 4p^2 \sin^2 \frac{\chi}{2} = \frac{4}{v^2} \frac{\alpha^2}{b^2 + \left(\frac{\alpha}{pv}\right)^2}.$$

因为在碰撞前电子静止的参照系中

$$Q^2 = \vec{p}'^2 - \left(\frac{\varepsilon'}{c} - m_e c\right)^2 = 2\varepsilon' m_e - 2m_e^2 c^2 = 2m_e T,$$

由此可以得到

$$T = \frac{2}{m_e v^2} \frac{\alpha^2}{b^2 + \left(\frac{\alpha}{pv}\right)^2} = \frac{2}{m_e v^2} \frac{\alpha^2}{b^2 + (b_{\min}^c)^2},$$

其中 $b_{\min}^c = \frac{\alpha}{pv}$, 即 T 是碰撞参数 b 的函数

$$T(b) = \frac{2}{m_e v^2} \frac{\alpha^2}{b^2 + (b_{\min}^c)^2}.$$

所以

$$T(0) = T_{\max} = \frac{2}{m_e v^2} \frac{\alpha^2}{(b_{\min}^c)^2} = 2m_e \gamma^2 \beta^2 c^2.$$

当 $b \gg b_{\min}^c$ 时,

$$T(b) \approx \frac{2}{m_e v^2} \frac{\alpha^2}{b^2}.$$

由条件 $T(b) \geqslant \varepsilon$ 可以给出

$$b_{\max}^c \geqslant \left(\frac{2\alpha^2}{m_e v^2 \varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

由此可以得到

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}(T > \varepsilon) &= 2\pi N Z \int_0^{b_{\max}} T(b) b \mathrm{d}b \\ &= 2\pi N Z \frac{\alpha^2}{m_e c^2 \beta^2} \ln \left(\frac{b_{\max}^c}{b_{\min}^c}\right)^2, \end{aligned} \tag{13.5}$$

除了电子的自旋修正项外, 此公式与上面得到的式 (13.4) 完全相同, 它的适用范围是 $\varepsilon \gg \hbar\langle\omega\rangle$, 即电子在原子中可视为是自由的.

如果想要将阻止本领公式推广到适用于碰撞中转移能量 T 与电子的平均结合能可比较或更小的情况 $(T<\varepsilon)$, 需要用量子力学处理, 基于量子力学的讨论可以得到

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}(T<\varepsilon)=2\pi NZ\frac{\alpha^2}{m_{\mathrm{e}}c^2\beta^2}[\ln(B_q(\varepsilon))^2-\beta^2], \tag{13.6}$$

其中

$$B_q(\varepsilon)=\frac{\gamma v\sqrt{2m\varepsilon}}{\hbar\langle\omega\rangle} \tag{13.7}$$

此公式首先由 Bethe 给出.

借助测不准关系并采用半经典的论证也可以得到相同的结果.

高速运动带电粒子与原子中电子碰撞时, 碰撞时间约为$\Delta t=\dfrac{b}{\gamma v}$, 这里 b 是碰撞参数, 此式可以由匀速直线运动的带电粒子在原子的电子上产生的场正比例于 $\dfrac{1}{(b^2+(\gamma vt)^2)^{\frac{3}{2}}}$ 而得到. 对于大的 γ , 此场在 $t=0$ 附近有尖锐的峰且峰的半宽度为 $\Delta t=\dfrac{b}{\gamma v}$, 所以该场的频谱集中在 $\omega\approx\dfrac{1}{\Delta t}=\dfrac{\gamma v}{b}$ 附近.

当 $\omega<\omega_0$ 时 (ω_0 是电子在原子中做轨道运动的平均频率, $\omega_0=\langle\omega\rangle$), 此场不能使原子激发, 因而无能量损失. 由此得到 $b_{\max}\approx\dfrac{\gamma v}{\omega_0}$.

对于这种转移能量很小的碰撞, 非相对论近似给出转移给电子的动量约为 $\Delta p\approx(2m_{\mathrm{e}}T)^{\frac{1}{2}}$, 则由测不准关系可以得到

$$\Delta b\geqslant\frac{\hbar}{(2m_{\mathrm{e}}T)^{\frac{1}{2}}},$$

由此有

$$b_{\min}=\frac{\hbar}{(2m_{\mathrm{e}}\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}.$$

采用此 $b_{\min}$, $b_{\max}$ 的表达式得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}(T<\varepsilon)&=2\pi NZ\int_{b_{\min}}^{b_{\max}}T(b)b\mathrm{d}b\\&=2\pi NZ\frac{\alpha^2}{m_{\mathrm{e}}c^2\beta^2}\ln\left(\frac{\gamma v\sqrt{2m\varepsilon}}{\hbar\langle\omega\rangle}\right)^2,\end{aligned} \tag{13.8}$$

与 Bethe 公式完全相同.

最终得到带电粒子在介质中走单位距离的总能量损失为

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}(T>\varepsilon)+\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}(T<\varepsilon)=4\pi NZ\frac{\alpha^2}{m_\mathrm{e}c^2\beta^2}[\ln(B_q)-\beta^2] \tag{13.9}$$

其中 $B_q=\dfrac{2m_\mathrm{e}\gamma^2\beta^2c^2}{\hbar\langle\omega\rangle}$.

13.3 快速带电粒子通过稠密介质时的能量损失

在上面的讨论中我们假定, 当快速运动带电粒子与介质中一个原子碰撞时, 不受其他原子的影响, 此假定只有对稀薄介质才成立. 假定电子不动, 速度的值为 V 碰撞参数为 b 的快速运动带电粒子在电子上产生的电磁场的频率约为 $\omega\sim\dfrac{\gamma V}{b}$. 只有当 $\omega>\omega_0$ 时原子才可能电离. 假定原子间的平均距离为 a, 当 $\dfrac{\gamma V}{\omega_0}\gg a$(即 $b\gg a$) 时, 带电粒子将与介质中的许多原子同时发生碰撞而必须考虑介质的极化效应.

这时可以从色散介质中有源项的波动方程出发来讨论问题.

在第九章, 采用推广的洛伦兹条件 $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{A}+\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial(\widehat{\varepsilon}\phi)}{\partial t}=0$, 已经得到

$$\overrightarrow{\nabla}^2\overrightarrow{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\widehat{\varepsilon}\frac{\partial\overrightarrow{A}}{\partial t}\right)=-\frac{4\pi\overrightarrow{j}}{c},$$

$$\widehat{\varepsilon}\left(\overrightarrow{\nabla}^2\phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\widehat{\varepsilon}\phi)\right)=-4\pi\rho, \tag{13.10}$$

其中

$$\widehat{\varepsilon}\overrightarrow{E}=\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r},t)+\int_0^\infty f(\tau)\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r},t-\tau)\mathrm{d}\tau,$$

$\widehat{\varepsilon}$ 是与时间有关的算符.

对于电荷为 ze 速度为 $\overrightarrow{V}$ 的带电粒子有

$$\rho(\overrightarrow{r},t)=ze\delta(\overrightarrow{r}-\overrightarrow{V}t),$$

$$\overrightarrow{j}(\overrightarrow{r},t)=ze\overrightarrow{V}\delta(\overrightarrow{r}-\overrightarrow{V}t).$$

对 $\phi(\overrightarrow{r},t)$ 和 $\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r},t)$ 作四维傅里叶变换

$$\phi(\overrightarrow{r},t)=\int\phi_{\overrightarrow{K},\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\overrightarrow{K}\cdot\overrightarrow{r}-\mathrm{i}\omega t}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{K}\mathrm{d}\omega}{(2\pi)^4},$$

$$\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r},t)=\int\overrightarrow{A}_{\overrightarrow{K},\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\overrightarrow{K}\cdot\overrightarrow{r}-\mathrm{i}\omega t}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{K}\mathrm{d}\omega}{(2\pi)^4}. \tag{13.11}$$

因为

$$\delta(\vec{r}-\vec{V}t)_{\vec{K},\omega}=2\pi\delta(\omega-\vec{K}\cdot\vec{V}),$$

可以得到

$$\phi_{\vec{K},\omega}=\frac{8\pi^2 ze\ \delta(\omega-\vec{K}\cdot\vec{V})}{\varepsilon(\omega)\left(K^2-\dfrac{\omega^2\varepsilon(\omega)}{c^2}\right)},$$

$$\vec{A}_{\vec{K},\omega}=\frac{8\pi^2 ze\ \delta(\omega-\vec{K}\cdot\vec{V})}{K^2-\dfrac{\omega^2\varepsilon(\omega)}{c^2}}=\varepsilon(\omega)\frac{\vec{V}}{c}\phi_{\vec{K},\omega}. \tag{13.12}$$

由此得到电磁场的傅里叶分量

$$\begin{aligned}(\vec{E})_{\vec{K},\omega}&=(-\vec{\nabla}\phi)_{\vec{K},\omega}-\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)_{\vec{K},\omega}=\mathrm{i}\left(\frac{\omega\varepsilon(\omega)}{c}\frac{\vec{V}}{c}-\vec{K}\right)\phi_{\vec{K},\omega},\\(\vec{H})_{\vec{K},\omega}&=(\vec{\nabla}\times\vec{A})_{\vec{K},\omega}=\mathrm{i}\vec{K}\times\vec{A}_{\vec{K},\omega}=\mathrm{i}\varepsilon(\omega)\vec{K}\times\frac{\vec{V}}{c}\phi_{\vec{K},\omega},\end{aligned} \tag{13.13}$$

其中得到的以速度 $\vec{V}$ 运动的带电粒子产生的电磁场的表达式依赖于介质的复介电常数 $\varepsilon(\omega)$, 即考虑了介质的极化效应.

需要指出, 这里的电磁场的表达式在空间的任何地方都适用, 包括快速运动的带电粒子自身.

为了讨论快速运动的带电粒子如何将能量损失在介质中, 可以有两种不同的处理方式.

第一种方式是讨论快速运动带电粒子产生的电磁场作用在介质中原子的电子上, 计算电子在此电磁场的作用下获得的能量, 即是快速运动带电粒子在介质中损失的能量.

另一种方式是讨论运动的带电粒子产生的电磁场作用在该运动的带电粒子自身的大小, 此电磁场阻止粒子的运动而使运动的带电粒子损失能量.

首先采用第一种方式讨论.

快速运动带电粒子因与原子中一个电子的碰撞而损失的能量可表示为

$$\begin{aligned}\Delta E&=-e\int_{-\infty}^{\infty}\vec{v}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{e}{\pi}\mathrm{Re}\int_0^{\infty}\mathrm{i}\omega\vec{X}_\omega\cdot\vec{E}^*(\omega)\,\mathrm{d}\omega,\end{aligned} \tag{13.14}$$

其中 $\vec{v}$ 是原子中该电子的速度, $\vec{E}$ 是快速运动带电粒子在该电子上产生的电场.

假定带电粒子沿 1 轴运动, 它与电子的碰撞发生在 $x_3 = 0$ 的平面上并令碰撞参数为 b.

当快速运动带电粒子与电子的距离最靠近时作用在电子上的电磁场最强, 可以取电子的空间坐标为 $(0, b, 0)$, 则

$$\vec{E}(\omega) = \int (\vec{E})_{\vec{K},\omega} \mathrm{e}^{\mathrm{i}bk_2} \frac{\mathrm{d}\vec{K}}{(2\pi)^3}. \tag{13.15}$$

现在计算平行于带电粒子运动速度 $\vec{V}$ 的电场分量

$$\begin{aligned} E_1(\omega) &= \int \mathrm{i}\left(\frac{\omega\varepsilon(\omega)}{c}\frac{V}{c} - k_1\right) \frac{8\pi^2 ze\ \delta(\omega - k_1 V)}{\varepsilon(\omega)\left(K^2 - \dfrac{\omega^2\varepsilon(\omega)}{c^2}\right)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}bk_2} \frac{\mathrm{d}\vec{K}}{(2\pi)^3} \\ &= \frac{\mathrm{i}ze}{\pi} \int \left(\frac{\omega\varepsilon(\omega)}{c}\frac{V}{c} - k_1\right) \frac{\delta(\omega - k_1 V)}{\varepsilon(\omega)\left(K^2 - \dfrac{\omega^2\varepsilon(\omega)}{c^2}\right)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}bk_2} \mathrm{d}^3 k, \end{aligned}$$

容易完成对 k_1 的积分,

$$E_1(\omega) = -\frac{\mathrm{i}ze\omega}{\pi V^2}\left[\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2\right] \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}bk_2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k_3 \frac{1}{k_2^2 + k_3^2 + \lambda^2},$$

其中

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2}{V^2}(1 - \beta^2\varepsilon(\omega)). \tag{13.16}$$

再完成对 k_3 的积分, 有

$$E_1(\omega) = -\frac{\mathrm{i}e\omega}{\pi V^2}\left[\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2\right] \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}bk_2} \frac{\pi}{\sqrt{k_2^2 + \lambda^2}}.$$

最后完成对 k_2 的积分, 得到

$$E_1(\omega) = -\frac{\mathrm{i}2ze\omega}{V^2}\left[\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2\right] K_0(\lambda b). \tag{13.17}$$

对于正的 ω, 由式 (13.16) 可知 λ^2 的虚部小于零. 在对 λ^2 开方时要求 λ 的复角的绝对值小于 $\dfrac{\pi}{2}$, 所以在表达式 (13.17) 中 λ 的实部大于零.

采用类似的推导可以得到垂直于带电粒子运动速度 $\vec{V}$ 的电场分量为

$$E_2(\omega) = \frac{2ze}{V}\frac{\lambda}{\varepsilon(\omega)} K_1(\lambda b).$$

我们感兴趣的磁场为

$$H_3(\omega) = \varepsilon(\omega)\beta E_2(\omega).$$

可以证明, 当 $\varepsilon(\omega) \to 1$ 时, $\overrightarrow{E}(\omega)$ 和 $\overrightarrow{H}(\omega)$ 趋向于真空中沿 1 轴匀速运动的带电粒子在 $(0, b, 0)$ 处产生的电磁场的傅里叶分量.

快速运动带电粒子因与一个原子中全部电子碰撞转移给该原子的能量为

$$\Delta E(b) = \frac{e}{\pi}\mathrm{Re}\sum_j f_j \int_0^\infty \mathrm{i}\omega \overrightarrow{X}_\omega \cdot \overrightarrow{E}^*(\omega)\mathrm{d}\omega,$$

其中 b 是碰撞参数, $\sum\limits_j f_j = Z$.

由介电常数的定义, 有

$$-e\sum_j f_j \overrightarrow{X}_\omega = \frac{1}{4\pi N}(\varepsilon(\omega) - 1)\overrightarrow{E}(\omega),$$

所以

$$\Delta E(b) = \frac{1}{4\pi^2 N}\mathrm{Re}\int_0^\infty (-1)\mathrm{i}\omega\varepsilon(\omega)|\overrightarrow{E}(\omega)|^2\mathrm{d}\omega. \tag{13.18}$$

快速运动带电粒子在介质中损失在单位距离上的能量 (对于带电粒子与电子的碰撞参数 $b > a$) 为

$$\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)_{b>a} = 2\pi N \int_a^\infty \Delta E(b) b\mathrm{d}b. \tag{13.19}$$

将上面得到的作用在电子上的电场带入式 (13.18) 和式 (13.19) 并经过计算得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)_{b>a} = \frac{2}{\pi}\frac{(ze)^2}{V^2}\mathrm{Re}\int_0^\infty \mathrm{i}\omega(\lambda a)^* K_1(\lambda^* a)K_0(\lambda a)\left[\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2\right]\mathrm{d}\omega, \tag{13.20}$$

此即 Fermi 首先给出的介质的阻止本领公式.

此公式也可用如下更简明的方法导出.

考虑一个以带电粒子的运动轨迹为轴, 半径为 a 的无限长圆柱体. 根据能量守恒, 匀速运动带电粒子在单位时间内的能量损失应当等于在单位时间内流出此圆柱体表面的能量, 因为取两粒子最靠近时 $t = 0$, 所以有

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)_{b>a} &= \frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\frac{c}{4\pi V}\int_{-\infty}^\infty 2\pi a E_1(t)H_3(t)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{ca}{2}\int_{-\infty}^\infty H_3(t)E_1(t)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

此积分可借助标准的办法变换为对频率的积分

$$\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)_{b>a} = -\frac{ca}{2\pi}\mathrm{Re}\int_0^\infty E_1(\omega)H_3^*(\omega)\mathrm{d}\omega, \tag{13.21}$$

代入上面得到的电场和磁场的表达式, 直接得到 Fermi 的阻止本领公式 (13.20).

因为修正的贝塞尔函数 $K_\nu(\lambda a)$ 的渐近表达式中含有因子 $\exp(-\lambda a)$, 所以 Fermi 公式中被积函数与 $\mathrm{e}^{-(\lambda+\lambda^*)a}$ 成正比, 由于 λ 的实部大于零, 所以对于大的 a, 随着 a 的增加阻止本领迅速趋向于零, 这意味着快速运动带电粒子的能量主要损失在靠近此带电粒子轨道的区域.

阻止本领公式 (13.20) 与由二体碰撞得到的公式在形式上很少有相似之处. 如果忽略掉介质的极化效应, 由式 (13.20) 应当得到二体碰撞机制得到的结果.

例如, 对于非相对论性的情况, 由式 (13.16) 可知 $\lambda = \dfrac{\omega}{V}$ 与 $\varepsilon(\omega)$ 无关, 式 (13.20) 的被积函数中修正贝塞尔函数是实数, 对积分的贡献来源于 $\dfrac{1}{\varepsilon(\omega)}$ 的虚部. 略去介质的极化效应, 在第 6 章已得到

$$\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi\frac{Ne^2}{m}\sum_i f_i(\omega_{i0}^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\gamma_i\omega)^{-1},$$

其中 N 是单位体积内的原子数.

对被积函数中修正贝塞尔函数采用小量展开并在窄共振近似下完成对 ω 的积分, 可以得到

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = 2\pi NZ\frac{\alpha^2}{m_\mathrm{e}c^2\beta^2}\ln(B_c^2 - \beta^2),$$

这里 $B_c = \dfrac{V}{a\langle\omega\rangle}$ 或 $B_c = \dfrac{\gamma V}{a\langle\omega\rangle}$, 与由二体碰撞机制得到的结果相同.

阻止本领也可用另外一种办法计算, 其表达式更容易直接与二体碰撞机制的结果相比较.

以速度 $\overrightarrow{V}$ 在介质中匀速运动的带电粒子产生电场

$$\begin{aligned}\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r},t) &= \int(\overrightarrow{E})_{\overrightarrow{K},\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\overrightarrow{K}\cdot\overrightarrow{r}-\mathrm{i}\omega t}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{K}\mathrm{d}\omega}{(2\pi)^4}\\ &= \int \mathrm{i}\frac{8\pi^2 ze\ \delta(\omega-\overrightarrow{K}\cdot\overrightarrow{V})}{\varepsilon(\omega)\left(K^2-\dfrac{\omega^2\varepsilon(\omega)}{c^2}\right)}\left(\frac{\omega\varepsilon(\omega)}{c}\frac{\overrightarrow{V}}{c}-\overrightarrow{K}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\overrightarrow{K}\cdot\overrightarrow{r}-\mathrm{i}\omega t}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{K}\mathrm{d}\omega}{(2\pi)^4},\end{aligned} \quad (13.22)$$

此表达式在空间的任何地方和任何时刻都适用, 包括运动的带电粒子自身. 做匀速运动粒子的轨道方程为 $\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{V}t$, 现在讨论作用在运动粒子自身的电场. 由于式 (13.22) 中被积函数中的 $\delta(\omega - \overrightarrow{K}\cdot\overrightarrow{V})$, 则有 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\overrightarrow{K}\cdot\overrightarrow{r}(t)-\mathrm{i}\omega t} = 1$. 所以作用在该运动的带电粒子上 ($\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{V}t$) 并与它的速度平行的电场分量为

$$E_1 = \frac{-\mathrm{i}ze}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\int\mathrm{d}k_2\mathrm{d}k_3\frac{\omega\left(\dfrac{1}{V^2}-\dfrac{\varepsilon(\omega)}{c^2}\right)}{\varepsilon(\omega)\{k_2^2+k_3^2+\omega^2\left(\dfrac{1}{V^2}-\dfrac{\varepsilon(\omega)}{c^2}\right)}. \quad (13.23)$$

由此得到介质对于快速运动带电粒子的阻止本领的表达式为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}&=-ze\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{e}_V=-zeE_1\\&=\frac{\mathrm{i}(ze)^2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\int_0^{q_0}\mathrm{d}q\frac{\omega q\left(\dfrac{1}{V^2}-\dfrac{\varepsilon(\omega)}{c^2}\right)}{\varepsilon(\omega)\left\{q^2+\omega^2\left(\dfrac{1}{V^2}-\dfrac{\varepsilon(\omega)}{c^2}\right)\right\}},\end{aligned}\tag{13.24}$$

其中 $q^2=k_2^2+k_3^2$,$\overrightarrow{e}_V$ 是带电粒子运动方向的单位矢量, $\hbar q_0$ 是最大横向转移动量. 显然阻止本领是 q_0 的函数, 记它为

$$F(q_0)=\frac{\mathrm{i}(ze)^2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\int_0^{q_0}\mathrm{d}q\frac{\omega q\left(\dfrac{1}{V^2}-\dfrac{\varepsilon(\omega)}{c^2}\right)}{\varepsilon(\omega)\left\{q^2+\omega^2\left(\dfrac{1}{V^2}-\dfrac{\varepsilon(\omega)}{c^2}\right)\right\}}.\tag{13.25}$$

当 $\dfrac{V}{c}\ll 1$ 时 (非相对论带电粒子), 则被积函数中 $\dfrac{\varepsilon(\omega)}{c^2}$ 项可以略去, 则可以得到

$$F(q_0)=\frac{\mathrm{i}(ze)^2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\int_0^{q_0}\mathrm{d}q\frac{q\omega}{\varepsilon(\omega)(\omega^2+q^2V^2)}.\tag{13.26}$$

我们先讨论这种非相对论的情况.

首先应当指出, 当 $\omega\to\infty$ 时, $\varepsilon(\omega)\to 1$, 式 (13.26) 中对 ω 的积分对数发散. 但这相应于真空的情况, 与我们感兴趣的运动粒子的能量损失无关, 所以应从表达式中减去. 即在被积函数中应当用 $\left(\dfrac{1}{\varepsilon(\omega)}-1\right)$ 代替 $\dfrac{1}{\varepsilon(\omega)}$.

也可用另一种方式消除这种对数发散, 取对 ω 的积分限从 $-\omega_M$ 到 $+\omega_M$, 然后令 $\omega_M\to\infty$, 因为介电常数的实部 $\varepsilon'(\omega)$ 是 ω 的偶函数, 在数学上自动消除了这种对数发散.

因为

$$\frac{1}{\varepsilon(\omega)}=\frac{\varepsilon_R(\omega)}{\varepsilon_R^2(\omega)+\varepsilon_I^2(\omega)}-\mathrm{i}\frac{\varepsilon_I(\omega)}{\varepsilon_R^2(\omega)+\varepsilon_I^2(\omega)}=\eta'(\omega)+\mathrm{i}\eta''(\omega),$$

由 $\varepsilon(\omega)$ 的性质可知, $\eta'(\omega)$ 是 ω 的偶函数, $\eta''(\omega)$ 是 ω 的奇函数.

又因为当 $\omega>0$ 时, $\varepsilon_I(\omega)>0$; 当 $\omega<0$ 时, $\varepsilon_I(\omega)<0$, 所以有, 当 $\omega>0$ 时, $\eta''(\omega)<0$; 当 $\omega<0$ 时, $\eta''(\omega)>0$.

由此可得

$$\begin{aligned}F(q_0)&=\frac{\mathrm{i}(ze)^2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\int_0^{q_0}\mathrm{d}q\frac{q\omega}{(\omega^2+q^2V^2)}(\eta'(\omega)+\mathrm{i}\eta''(\omega))\\&=-\frac{(ze)^2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\int_0^{q_0}\mathrm{d}q\frac{q\omega}{(\omega^2+q^2V^2)}(\eta''(\omega)),\end{aligned}$$

所以

$$F(q_0)=\frac{2(ze)^2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}\omega\int_0^{q_0}\mathrm{d}q\frac{q\omega}{(\omega^2+q^2V^2)}|\eta''(\omega)|. \tag{13.27}$$

由于q_0V 近似相应于碰撞参数为原子间距离时产生的场的频率, 所以对于我们所感兴趣的 ω 可假定 $\dfrac{q_0V}{\omega}\gg 1$. 由此有

$$\begin{aligned}F(q_0)&=\frac{2(ze)^2}{\pi V^2}\int_0^\infty \omega\mathrm{d}\omega|\eta''(\omega)|\frac{1}{2}\ln\left(q^2+\frac{\omega^2}{V^2}\right)|_0^{q_0}\\&\approx\frac{2(ze)^2}{\pi V^2}\int_0^\infty \omega|\eta''(\omega)|\mathrm{d}\omega\ln\left(\frac{q_0V}{\omega}\right)\\&=\frac{2(ze)^2}{\pi V^2}\{\ln(q_0V)\int_0^\infty \omega|\eta''(\omega)|\mathrm{d}\omega-\omega|\eta''(\omega)|\ln(\omega)\mathrm{d}\omega\}.\end{aligned}$$

利用 $\varepsilon(\omega)$ 的性质可以得到

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\omega|\eta''(\omega)|\mathrm{d}\omega&=-\int_0^\infty\omega\eta''(\omega)\mathrm{d}\omega=-\frac{\mathrm{i}}{2}\int_{-\infty}^\infty\frac{\omega}{\varepsilon(\omega)}\mathrm{d}\omega\\&=-\frac{\mathrm{i}}{2}\int_{-\infty}^\infty\frac{\omega(\varepsilon_R-\mathrm{i}\varepsilon_I)}{|\varepsilon(\omega)|^2}\mathrm{d}\omega=-\frac{\mathrm{i}}{2}\int_{-\infty}^\infty\frac{\omega(1-\varepsilon_R-\mathrm{i}\varepsilon_I)}{|\varepsilon(\omega)|^2}\mathrm{d}\omega\\&=-\frac{\mathrm{i}}{2}\int_{-\infty}^\infty\frac{\omega(1-\varepsilon(\omega))}{|\varepsilon(\omega)|^2}\mathrm{d}\omega.\end{aligned}$$

又因为 $\varepsilon(\omega)$ 在 ω 复平面的上半平面解析, 所以

$$-\frac{\mathrm{i}}{2}\int_{-\infty}^\infty\frac{\omega(1-\varepsilon(\omega))}{|\varepsilon(\omega)|^2}\mathrm{d}\omega=\frac{\mathrm{i}}{2}\int_\sigma\frac{\omega(1-\varepsilon(\omega))}{|\varepsilon(\omega)|^2}\mathrm{d}\omega,$$

其中 σ 是 ω 复平面的上半平面无限大半圆.

对于很大的 ω, 有近似式

$$\varepsilon(\omega)\approx 1-\frac{4\pi NZe^2}{m\omega^2},$$

即

$$\omega(1-\varepsilon(\omega))\approx\frac{4\pi NZe^2}{m\omega},$$

其中 m 是电子的质量, N 是单位体积的原子数目, Z 是一个原子中电子的数目. 所以

$$-\int_\sigma\frac{\omega(1-\varepsilon(\omega))}{|\varepsilon(\omega)|^2}\mathrm{d}\omega\approx-\frac{4\pi NZe^2}{m}\int_\sigma\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega}=-\frac{4\pi NZe^2}{m}(-\mathrm{i})=\mathrm{i}\frac{4\pi^2NZe^2}{m}.$$

由此得到

$$\int_0^{\infty} \omega|\eta''(\omega)|\mathrm{d}\omega = -\int_0^{\infty} \omega\eta''(\omega)\mathrm{d}\omega = -\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\mathrm{i}\frac{4\pi^2 NZe^2}{m}\right) = \frac{2\pi^2 NZe^2}{m}.$$

定义

$$\begin{aligned}\ln\overline{\omega} &= \frac{-\int_0^{\infty} \omega\eta''(\omega)\ln(\omega)\mathrm{d}\omega}{-\int_0^{\infty} \omega\eta''(\omega)\mathrm{d}\omega} \\ &= \frac{-\int_0^{\infty} \omega\eta''(\omega)\ln(\omega)\mathrm{d}\omega}{\dfrac{2\pi^2 NZe^2}{m}} \\ &= \frac{m}{2\pi^2 NZe^2}\int_0^{\infty} \omega|\eta''(\omega)|\ln(\omega)\mathrm{d}\omega,\end{aligned}$$

则可得表达式

$$\int_0^{\infty} \omega|\eta''(\omega)|\ln(\omega)\mathrm{d}\omega = \frac{2\pi^2 NZe^2}{m}\ln\overline{\omega}.$$

对于非相对论的情况最终得到

$$F(q_0) = \frac{4\pi NZ(ze^2)^2}{mV^2}\ln\left(\frac{q_0 V}{\overline{\omega}}\right). \tag{13.28}$$

由式 (13.27) 来看, 对阻止本领的贡献似乎主要来自介质的介电常数的虚部 $\varepsilon_I(\omega)$ 的绝对值大的频谱范围内, 但这里需要指出实际上并不一定如此. 在其虚部很小但 $\varepsilon(\omega) \approx \varepsilon_R(\omega)$, 通过零点的频率区间也可给出可观的贡献. 因为由式 (13.26) 可知 $\varepsilon(\omega)$ 的零点是被积函数的极点, 此极点从 ω 复平面的下方靠近实轴, 所以对 ω 沿实轴的积分在极点处必须向上凹陷因而对积分给出贡献. 第六章讨论的透明介质的介电常数 $\varepsilon(\omega) = a - \dfrac{b}{\omega^2}$ 即是这种情况.

在式 (13.28) 中, q_0 应当满足条件 $\dfrac{\omega_0}{V} \ll q_0 \ll \dfrac{1}{a}$, 这里 ω_0 是电子在原子中的平均频率, a 是原子间的平均距离.

为了将式 (13.28) 推广到适合粒子的最大转移动量 $\hbar q_1 > \hbar q_0$ 的区域, 可以将此公式与用量子力学对于单个原子的碰撞得到的结果结合起来. 由带电粒子与原子的量子碰撞理论已经知道, 带电粒子转移动量在 $\hbar dq$ 区间内的能量损失为

$$\mathrm{d}F = \frac{4\pi NZ\alpha^2}{mV^2}\frac{\mathrm{d}q}{q},$$

所以 q 在 q_0 和 q_1 之间的能量损失为 $\dfrac{4\pi NZ\alpha^2}{mV^2}\ln\dfrac{q_1}{q_0}$.

将它与式 (13.28) 相加得到

$$F(q_1)=\frac{4\pi NZ(ze^2)^2}{mV^2}\ln\left(\frac{q_1V}{\varpi}\right). \tag{13.29}$$

下面讨论一般情况 (适用于高速运动带电粒子), 即式 (13.25).

首先研究被积函数在 ω 复平面上的极点.

因为 $\varepsilon(\omega)$ 在 ω 复平面的上半平面既无极点也无零点, 所以被积函数在 ω 复平面的上半平面的极点完全由方程 $q^2+\omega^2\left(\frac{1}{V^2}-\frac{\varepsilon(\omega)}{c^2}\right)=0$ 的根决定.

下面证明：对于给定的 q (实数), 此方程在 ω 的上半平面只有一个根.

为此需再次引用复变函数的定理：$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{df}{d\omega}\frac{d\omega}{f(\omega)-a}$ 的值等于函数 $(f(\omega)-a)$ 在闭路 C 内的零点数和极点数之差, 这里积分沿 ω 复平面上的任意闭合回路 C 进行.

令$f(\omega)=\omega^2\left(\frac{\varepsilon(\omega)}{c^2}-\frac{1}{V^2}\right)$, $a=q^2$, 并在 ω 平面上取回路 C 为实轴加上半平面的无限大半圆. 因 $\varepsilon(\omega)$ 在 ω 复平面的上半平面无极点 (最多 $\omega=0$ 是极点, 例如金属的情况, 但 $\omega^2\varepsilon(0)$ 无极点), 这导致 $f(\omega)$ 在 ω复平面的上半平面 (包括实轴) 无极点. 则由上述定理可知：积分 $\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{df}{d\omega}\frac{d\omega}{f(\omega)-a}$ 给出函数 $(f(\omega)-a\ )$ 在 C 内的零点数.

因为有关系式$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{df}{d\omega}\frac{d\omega}{f(\omega)-a}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C'}\frac{df}{f(\omega)-a}$, 即在 ω 复平面上的积分可以变换为在 f 复平面上的积分, 下面讨论从 ω 复平面到 f 复平面的映射, 映射函数为

$$f(\omega)=\omega^2\left(\frac{\varepsilon(\omega)}{c^2}-\frac{1}{V^2}\right)\quad \text{(见表13.1和图13.1)}.$$

表 13.1　从 ω 复平面到 f 复平面的映射

ω 平面	f 平面
$\omega=0$	$\to f=0$
无限大半圆	$\to$ 无限大圆 $\left(\omega^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{V^2}\right)\right)$
正实轴	$\to$ 复杂曲线　$f_1>0$
负实轴	$\to$ 复杂曲线　$f_1<0$

由图 13.1 可知, 因为 $a=q^2$ 在 f 平面的正实轴上, 所以可得如下结果：

如果 a 在 C' 之内, 则有 $\frac{1}{2\pi i}\oint_{C'}\frac{df}{f(\omega)-a}=1$;

如果 a 在 C' 之外, 则有 $\frac{1}{2\pi i}\oint_{C'}\frac{df}{f(\omega)-a}=0$.

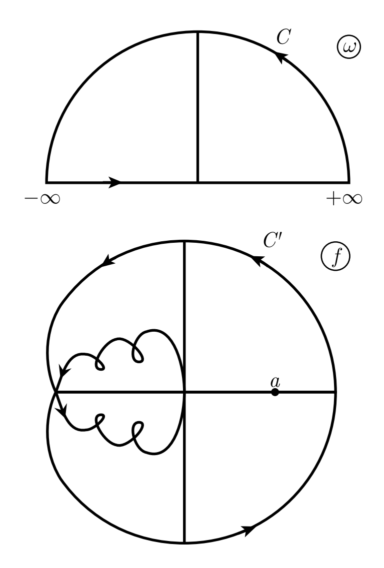


图 13.1　从复平面 ω 到复平面 f 的映射

由此可得结论：方程

$$\omega^2\left(\frac{\varepsilon(\omega)}{c^2}-\frac{1}{V^2}\right)=q^2 \tag{13.30}$$

在 ω 复平面上只有一个根, 且这个根是纯虚数. 因为只有 $\omega=\mathrm{i}\omega_I(\omega_I>0)$ 时 $\varepsilon(\mathrm{i}\omega_I)$ 才是实数, 才能给出 f 是实数.

有恒等关系式

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega\left(\dfrac{1}{V^2}-\dfrac{\varepsilon(\omega)}{c^2}\right)}{\varepsilon(\omega)\left\{q^2+\omega^2\left(\dfrac{1}{V^2}-\dfrac{\varepsilon(\omega)}{c^2}\right)\right\}}\mathrm{d}\omega\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left(\dfrac{1}{\varepsilon(\omega)V^2}-\dfrac{1}{c^2}\right)\omega\mathrm{d}\omega}{\left\{q^2+\omega^2\left(\dfrac{1}{V^2}-\dfrac{\varepsilon(\omega)}{c^2}\right)\right\}}\\
&=\oint_C\frac{\left(\dfrac{1}{\varepsilon(\omega)V^2}-\dfrac{1}{c^2}\right)\omega\mathrm{d}\omega}{\left\{q^2+\omega^2\left(\dfrac{1}{V^2}-\dfrac{\varepsilon(\omega)}{c^2}\right)\right\}}-\int_\sigma\frac{\left(\dfrac{1}{\varepsilon(\omega)V^2}-\dfrac{1}{c^2}\right)\omega\mathrm{d}\omega}{\left\{q^2+\omega^2\left(\dfrac{1}{V^2}-\dfrac{\varepsilon(\omega)}{c^2}\right)\right\}},\end{aligned}$$

其中 σ 是 ω 复平面上半平面的无限大半圆, 而 C 是由实轴加 σ 构成的封闭曲线.

因为在无限大半圆 σ 上有 $\varepsilon(\omega)\approx 1$. 所以可以得到

$$\int_\sigma \frac{\left(\dfrac{1}{\varepsilon V^2}-\dfrac{1}{c^2}\right)\omega\mathrm{d}\omega}{\left\{q^2+\omega^2\left(\dfrac{1}{V^2}-\dfrac{\varepsilon(\omega)}{c^2}\right)\right\}}=\int_\sigma\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega}=\mathrm{i}\pi.$$

积分 $\oint_C \dfrac{\left(\dfrac{1}{\varepsilon V^2}-\dfrac{1}{c^2}\right)\omega\mathrm{d}\omega}{\left\{q^2+\omega^2\left(\dfrac{1}{V^2}-\dfrac{\varepsilon(\omega)}{c^2}\right)\right\}}$ 可以用留数定理计算. 因为以 ω 为复变数的函数 $\dfrac{\left(\dfrac{1}{\varepsilon V^2}-\dfrac{1}{c^2}\right)\omega}{\left\{q^2+\omega^2\left(\dfrac{1}{V^2}-\dfrac{\varepsilon(\omega)}{c^2}\right)\right\}}$ 的留数为

$$\frac{\left(\dfrac{1}{\varepsilon V^2}-\dfrac{1}{c^2}\right)\omega}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left\{\omega^2\left(\dfrac{1}{V^2}-\dfrac{\varepsilon(\omega)}{c^2}\right)\right\}}=\frac{\left(\dfrac{1}{\varepsilon V^2}-\dfrac{1}{c^2}\right)\omega}{-\dfrac{\mathrm{d}q^2}{\mathrm{d}\omega}},$$

由此可将式 (13.25) 化为

$$\begin{aligned}F(q_0)=&\frac{\mathrm{i}(ze)^2}{\pi}\int_0^{q_0}q\mathrm{d}q\left\{2\pi\mathrm{i}\times\frac{\left(\dfrac{1}{\varepsilon V^2}-\dfrac{1}{c^2}\right)\omega}{-\dfrac{\mathrm{d}q^2}{\mathrm{d}\omega}}-\mathrm{i}\pi\right\}\\
=&(ze)^2\int_0^{q_0}q\mathrm{d}q\left\{\frac{\left(\dfrac{1}{\varepsilon V^2}-\dfrac{1}{c^2}\right)\omega}{\dfrac{q\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\omega}}+1\right\}\\
=&(ze)^2\int_{\omega(0)}^{\omega(q_0)}\left(\frac{1}{\varepsilon V^2}-\frac{1}{c^2}\right)\omega\mathrm{d}\omega+\frac{1}{2}(ze)^2q_0^2\\
=&\frac{(ze)^2}{V^2}\int_{\omega(0)}^{\omega(q_0)}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)\omega\mathrm{d}\omega+\frac{1}{2}(ze)^2q_0^2\\
&+\frac{1}{2}(ze)^2\left(\frac{1}{V^2}-\frac{1}{c^2}\right)\{\omega^2(q_0)-\omega^2(0)\}.\end{aligned}\tag{13.31}$$

由方程 (13.30) 的解可知, 当 q 变大时 $\omega(q)$ 的模也变大, 而对大的 ω 有近似关系式

$$\varepsilon(\omega)\approx 1-\frac{4\pi NZe^2}{m\omega^2},$$

所以当 $q=q_0$ 时此关系式成立, 将此近似式代入要解的 $\omega(q_0)$ 的方程得到

$$\omega^2(q_0)\approx -V^2\gamma^2\left(q_0^2+\frac{4\pi NZe^2}{mc^2}\right).$$

将 $\omega(q_0)$ 代入到式 (11.30) 可得到

$$F(q_0)=\frac{(ze)^2}{V^2}\int_{\omega(0)}^{\mathrm{i}Vq_0\gamma}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)\omega\mathrm{d}\omega-\frac{2\pi NZ(ze^2)^2}{mc^2}-\frac{(ze)^2}{2V^2\gamma^2}\omega^2(0)),$$

其中在取对 ω 的积分上限时只保留了 $\omega(q_0)$ 的首项 $\mathrm{i}Vq_0\gamma$, 而对 ω 的积分是沿着纯虚轴进行.

对积分作变数变换 $\omega=\mathrm{i}\omega'$, 即变换到沿实轴积分, 并令 $\xi=\dfrac{\omega(0)}{\mathrm{i}},\dfrac{1}{\varepsilon}=\eta$, 则有

$$\int_{\omega(0)}^{\mathrm{i}Vq_0\gamma}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)\omega\mathrm{d}\omega=-\int_{\xi}^{Vq_0\gamma}(\eta(\mathrm{i}\omega')-1)\omega'\mathrm{d}\omega'.$$

由 Kramer-Kroning 关系

$$\eta(\mathrm{i}\omega')-1=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\chi\eta''(\chi)\mathrm{d}\chi}{\chi^2+\omega'^2}$$

可以得到

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_\xi^{Vq_0\gamma}\frac{\chi|\eta''(\chi)|\omega'\mathrm{d}\omega'\mathrm{d}\chi}{\chi^2+\omega'^2}=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\chi|\eta''(\chi)|\ln\left(\frac{V^2q_0^2\gamma^2}{\chi^2+\xi^2}\right)\mathrm{d}\chi.$$

借助此结果并记

$$\ln\Omega=\overline{\frac{1}{2}\ln(\omega^2+\xi^2)},$$

其中符号上方的一杠表示对 $\omega|\eta''|$ 的平均.

由此得到

$$F(q_0)=\frac{4\pi NZ(ze^2)^2}{mV^2}\ln\left(\frac{Vq_0\gamma}{\Omega}\right)-\frac{2\pi NZ(ze^2)^2}{mc^2}+\frac{(ze)^2}{2V^2\gamma^2}\xi^2. \tag{13.32}$$

下面对此公式分两种情况作进一步讨论.

(1) 当 $V^2<\dfrac{c^2}{\varepsilon_0}$ 时, 其中 $\varepsilon_0=\varepsilon(\omega=0)$.

因为当 ω 在虚轴上从 0 变到 $\mathrm{i}\infty$ 时, $\varepsilon(\omega)$ 从 ε_0 单调下降到 1, 即方程 (13.30) 的左边从 0 单调上升到 $\mathrm{i}\infty$. 所以 $q=0$ 时有 $\omega=0$, 也即 $\xi=\omega(0)=0$. 由此可得到

$$\ln\Omega=\overline{\frac{1}{2}\ln(\omega^2+\xi^2)}=\overline{\frac{1}{2}\ln(\omega^2)}=\ln\overline{\omega}, \tag{13.33}$$

所以

$$F(q_0)=\frac{4\pi NZ(ze^2)^2}{mV^2}\left[\ln\left(\frac{Vq_0\gamma}{\overline{\omega}}\right)-\frac{V^2}{2c^2}\right]. \tag{13.34}$$

当 $V\ll c$ 时, 如同所期望的上式变为非相对论的结果 (13.28).

(2) 当 $V^2>\dfrac{c^2}{\varepsilon_0}$ 时, 对金属 ($\varepsilon(0)=\infty$) 此条件总满足.

这时在 ω 的虚轴上, 方程 (13.30) 的左边有两个零点, 一个在 $\omega=0$, 另一个在 $\mathrm{i}\xi$, 它由

$$\varepsilon(\mathrm{i}\xi)=\frac{c^2}{V^2} \tag{13.35}$$

给出. 因为在 ω 由 0 到 $\varepsilon(\mathrm{i}\xi)$ 的区间方程 (13.30) 的左边为负值, 而当 $|\omega|>\xi$ 时方程的左边取从 0 到 $+\infty$ 的所有正值, 所以当 $q\to 0$ 时, 方程 (13.30) 的根应当趋近于 ξ.

如果 $\xi\ll\omega_0$, 其中 ω_0 是原子的特征频率, 则式 (13.32) 中的最后一项可以略去, 且有 $\varOmega\approx\omega$, 再次得到式 (13.28).

如果 $\xi\gg\omega_0$, 则 $\varepsilon(\mathrm{i}\xi)=1-\dfrac{4\pi Ne^2}{m(\mathrm{i}\xi)^2}\approx 1$, 由式 (13.35) 可知这种情况相应于极端相对论的情况并且可得到

$$\xi^2=\frac{4\pi NZe^2V^2\gamma^2}{mc^2}\approx\frac{4\pi NZe^2\gamma^2}{m}.$$

由此式可知, 对于给定的 N 值, 当 γ 足够大时条件 $\xi\gg\omega_0$ 总可得到满足.

又由 $\ln\varOmega=\overline{\dfrac{1}{2}\ln(\omega^2+\xi^2)}$ 可得 $\varOmega\approx\xi$. 所以对于极端相对论的情况最终得到

$$F(q_0)=\frac{2\pi NZ(ze^2)^2}{mc^2}\ln\left(\frac{mc^2q_0^2}{4\pi NZe^2}\right). \tag{13.36}$$

13.4 切连科夫辐射

1934 年, 切连科夫从实验上发现, 当带电粒子 (电荷 ze) 通过透明介质 (即介电常数 ε 是一实数) 而速度大于电磁波在此介质中传播时会产生辐射, 而此种辐射与粒子的加速度无关. 1937 年塔姆对此种辐射从理论上给出了解释 (1958 年他们因此工作获诺贝尔奖).

对于以速度 $\vec{V}$ 在透明介质中匀速运动的带电粒子有

$$\rho(\vec{r},t)=ze\delta(\vec{r}-\vec{V}t),$$

$$\vec{j}(\vec{r},t)=ze\vec{V}\delta(\vec{r}-\vec{V}t),$$

由此产生的电场作用于运动带电粒子自身并给出介质的阻止本领表达式为 (见式 (13.25))

$$F(q_0)=\frac{\mathrm{i}(ze)^2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\int_0^{q_0}\mathrm{d}q\frac{\omega q\left(\dfrac{1}{V^2}-\dfrac{\varepsilon}{c^2}\right)}{\varepsilon\left\{q^2+\omega^2\left(\dfrac{1}{V^2}-\dfrac{\varepsilon}{c^2}\right)\right\}}. \tag{13.37}$$

令 $\varepsilon=\dfrac{c^2}{V_c^2}$, 则 V_c 是电磁波在透明介质中的传播速度.

与色散介质的情况不同, 这里 ε 是实数常数. 由式 (13.37) 可以看出, 此时对 $F(q_0)$ 的贡献来源于 ω 的方程

$$q^2+\omega^2\left(\frac{1}{V^2}-\frac{\varepsilon}{c^2}\right)=0$$

的实根. 此方程有实根的条件是 $V>V_c$, 即带电粒子的速度要大于电磁波在此透明介质中的传播速度.

因对任一给定的 q, $\pm|\omega|$ 同时是根, 所以

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\omega}=-\frac{\mathrm{i}(ze)^2}{\pi}\sum\omega\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{\varepsilon V^2}\right)\int_0^{q_0}q\mathrm{d}q\frac{1}{q^2+\omega^2\left(\dfrac{1}{V^2}-\dfrac{\varepsilon}{c^2}\right)},$$

其中求和表示对 $\pm|\omega|$.

引进新变数 $\xi=q^2+\omega^2\left(\dfrac{1}{V^2}-\dfrac{\varepsilon}{c^2}\right)$, 可得

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\omega}=-\frac{\mathrm{i}e^2}{2\pi}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{\varepsilon V^2}\right)\sum\omega\int\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}.$$

因为当 $\omega>0$ 时, 有 $\varepsilon_I>0$; 当 $\omega<0$ 时, $\varepsilon_I<0$, 此种关系对透明介质 ($\varepsilon_I\to 0$) 也成立. 所以对 $+|\omega|$, $\varepsilon=\varepsilon_R+\mathrm{i}\delta$, 对 $-|\omega|$, $\varepsilon=\varepsilon_R-\mathrm{i}\delta$, 这里 $\delta>0$, 是一无限小量. 由此可得

$$\sum\omega\int\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}=+|\omega|\mathrm{i}\pi-|\omega|(-\mathrm{i}\pi)=2\pi\mathrm{i}|\omega|,$$

所以得到

$$\mathrm{d}F=ze^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{\varepsilon V^2}\right)\omega\mathrm{d}\omega.$$

可以看出 $V>V_c$ 时, $\mathrm{d}F>0$, 即带电粒子损失能量. 此能量损失不是因介质中原子的激发和电离而引起, 因 ε 没有虚部. 为了理解此种能量损失机制, 可以直接由这个高速运动的带电粒子产生的电磁场出发.

由上面的讨论已知, 沿 1 轴匀速运动的带电粒子在坐标为 $(0,b,0)$ 处产生的电场和磁场有渐近表达式

$$\begin{aligned}
&E_1(\omega)\rightarrow \mathrm{i}\frac{ze\omega}{c^2}\left[1-\frac{1}{\beta^2\varepsilon}\right]\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda b}}\mathrm{e}^{-\lambda b},\\
&E_2(\omega)\rightarrow \frac{ze}{V\varepsilon}\sqrt{\frac{2\pi\lambda}{b}}\mathrm{e}^{-\lambda b},\\
&H_3(\omega)\rightarrow \beta\varepsilon E_2(\omega),
\end{aligned}\tag{13.38}$$

其中 λ 满足

$$\lambda^2=\omega^2\left(\frac{1}{V^2}-\frac{1}{V_c^2}\right).\tag{13.39}$$

考虑一个以粒子的运动轨迹为轴, 半径为 b 的圆柱体. 则对大的 b, 单位时间内流出此圆柱体表面的能量的表达式为

$$\frac{cb}{\pi}\mathrm{Re}\int_0^\infty H_3^*(\omega)E_1(\omega)\mathrm{d}\omega,$$

当 $V>V_c$ 时, λ 为纯虚数, 则有

$$\mathrm{e}^{-(\lambda+\lambda^*)b}=1.$$

即对于很大的 b, 此能流与 b 无关, 这是辐射场的特征.

切连科夫辐射产生的机制可以由图 13.2 来理解 (图中的 v 表示粒子速度, 折射指数 $n=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$), 图 13.2(b) 与子弹在空气中以超音速飞行时产生激波的情况完全类似.

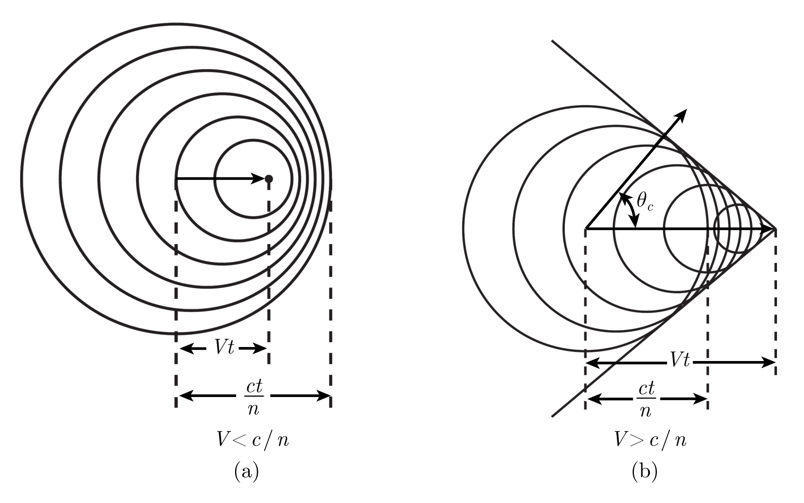


图 13.2 切连科夫辐射

电磁波在透明介质中的波矢量 $\vec{k}$ 的值和频率有关系式 $\omega=kV_c$, 又因为 $k_1V=\omega$, 假定波的传播方向与粒子运动方向之间的夹角为 θ_c(称切连科夫角), 则有

$$\cos\theta_c=\frac{k_1}{k}=\frac{V_c}{V}.$$

由电场的渐近表达式 (13.38) 可以得到

$$-\frac{E_1}{E_2}=\tan\theta_c.$$

切连科夫辐射的这种特征可以用于测量带电粒子的速度. 当带电粒子以速度 $V>V_c$ 通过介质时在切连科夫角 θ_c 方向发射光子, 测量此角度就可得到带电粒子的速度. 切连科夫探测器就是根据这一原理制成的. 1955 年利用切连科夫探测器发现了反质子.

13.5 例　　题

例题 13.1 一个电荷为 e、质量为 m 的粒子被–自然频率为 ω_0 和小的阻尼宽度为 Γ 简谐地束缚在原点, 在一段时间间隔内有与时间有关的电场 $\vec{E}(\vec{r},t)$ 和磁场 $\vec{H}(\vec{r},t)$ 作用在此带电粒子上 (例如, 一个快速运动电荷从旁边通过产生的电磁场), 假定粒子的运动是非相对论的且运动的振幅比场的空间变化尺度小许多, 证明此带电粒子在电磁场的作用下得到的能量为

$$\Delta E=\frac{e^2}{2m}|\vec{E}(\omega_0)|^2.$$

证明

$$\vec{E}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\vec{E}_\omega \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi},$$

$$\vec{E}_\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\vec{E}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t.$$

粒子运动是非相对论的, 电场是主要的. 在电场的作用下带电粒子得到的能量

$$\begin{aligned}\Delta E&=e\int_{-\infty}^{\infty}\vec{V}\cdot\vec{E}\mathrm{d}t\\&=e\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{\infty}\vec{V}_\omega \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\frac{d\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\vec{E}_{\omega'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega' t}\frac{\mathrm{d}\omega'}{2\pi}\\&=-\frac{e}{\pi}\mathrm{Re}\int_0^{\infty}\mathrm{i}\omega\,\vec{r}_\omega\cdot\vec{E}^*(\omega)\,\mathrm{d}\omega.\end{aligned}$$

推导时利用了

$$\vec{V}_\omega = -\mathrm{i}\omega\vec{r}_\omega,$$

由带电粒子的运动方程

$$m(\ddot{\vec{r}} + \gamma\dot{\vec{r}} + \omega_i^2\vec{r}) = e\vec{E}$$

可得

$$\vec{r}_\omega = \frac{e}{m}\frac{\vec{E}_\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\omega\gamma}.$$

借助公式

$$\frac{1}{\omega - \omega_0 + \mathrm{i}\delta} = P\frac{1}{\omega - \omega_0} - \mathrm{i}\pi\delta(\omega - \omega_0),$$

最终可得

$$\Delta E = \frac{e^2}{2m}|\vec{E}(\omega_0)|^2.$$

例题 13.2　一个非相对论带电粒子穿过等离子体, 证明对于碰撞参数 b 大于等离子体的 Debye 长度 λ_{D} 的碰撞, 带电粒子的能量损失可表示为

$$\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)_{b>\lambda_{\mathrm{D}}} = \frac{1}{\pi}\ \frac{(ze)^2}{V^2}\omega_p^2\ln\left(\frac{1.123k_{\mathrm{D}}V}{\omega_p}\right),$$

这里

$$k_{\mathrm{D}} = \frac{1}{\lambda_{\mathrm{D}}} = \sqrt{\frac{4\pi ne^2}{kT}}$$

是等离子体的 Debye 屏蔽参数,

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi ne^2}{m}}$$

是等离子体的振荡频率.

证明　当 $x \ll 1$ 时,

$$K_0(x) \approx -\left(\ln\frac{x}{2} + 0.5772\right),$$

$$K_1(x) \approx \frac{1}{x}.$$

费米的能量损失公式为

$$\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)_{b>a} = \frac{2}{\pi}\frac{(ze)^2}{V^2}\mathrm{Re}\int_0^\infty \mathrm{i}\omega(\lambda a)^*K_1(\lambda^* a)K_0(\lambda a)\left[\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2\right]\mathrm{d}\omega.$$

对等离子体

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \mathrm{i}\omega\Gamma},\quad \mathit{\Gamma} \ll \omega_p,$$

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2}{V^2}(1 - \beta^2 \varepsilon(\omega)).$$

对非相对论性粒子

$$\lambda \approx \frac{\omega}{V},$$

$$\left[\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2\right] \approx \frac{1}{\varepsilon(\omega)}.$$

当 $\lambda a \ll 1$ 时,$(\lambda a)^* K_1(\lambda^* a) = 1$,

$$K_0(\lambda a) \approx -[\frac{\lambda a}{2} + 0.5772] \approx \ln \frac{1.123}{\lambda a},$$

$$K_0(\lambda \lambda_{\mathrm{D}}) \approx \ln \frac{1.123 k_{\mathrm{D}} V}{\omega},$$

代入到费米的能量损失公式, 有

$$\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)_{b>\lambda_{\mathrm{D}}} = \frac{2}{\pi}\ \frac{(ze)^2}{V^2} \mathrm{Re} \int_0^\infty \left(\frac{\mathrm{i}\omega}{\varepsilon(\omega)}\right) \ln\left(\frac{1.123 k_{\mathrm{D}} V}{\omega}\right) \mathrm{d}\omega.$$

利用公式

$$\frac{1}{\omega - \omega_p + \mathrm{i}\delta} = P\frac{1}{\omega - \omega_p} - \mathrm{i}\pi\delta(\omega - \omega_p),$$

我们可得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)_{k_{\mathrm{D}} b>1} = \frac{1}{\pi} \frac{(ze)^2}{V^2} \omega_p^2 \ln\left(\frac{1.123 k_{\mathrm{D}} V}{\omega_p}\right).$$

参 考 文 献

曹昌祺. 电动力学. 第二版. 北京：人民教育出版社, 1962

郭硕鸿. 电动力学. 北京：高等教育出版社, 1997

俞允强. 电动力学简明教程. 北京：北京大学出版社, 1999

虞福春, 郑春开. 电动力学. 北京：北京大出版社, 1999

Jackson J D. Classical Electrodynamics. New York: John and Son, 1975;
经典电动力学 Classical Electrodynamics. 第三版影印版. 北京：高等教育出版社, 2004

Landau L D, Lifshitz E M.The Classical Theory of Field. 第四版. 北京：世界图书出版公司北京分公司, 1999

Landau L D, Lifshitz E M.The Electrodynamic of Continuous Media. 第二版. 北京：世界图书出版公司北京分公司, 1999

索　　引

J

K

L

N

O

P

《现代物理基础丛书》已出版书目

(按出版时间排序)

1. 现代声学理论基础	马大猷 著	2004.03
2. 物理学家用微分几何 (第二版)	侯伯元, 侯伯宇 著	2004.08
3. 数学物理方程及其近似方法	程建春 编著	2004.08
4. 计算物理学	马文淦 编著	2005.05
5. 相互作用的规范理论 (第二版)	戴元本 著	2005.07
6. 理论力学	张建树, 等 编著	2005.08
7. 微分几何入门与广义相对论 (上册 · 第二版)	梁灿彬, 周 彬 著	2006.01
8. 物理学中的群论 (第二版)	马中骐 著	2006.02
9. 辐射和光场的量子统计	曹昌祺 著	2006.03
10. 实验物理中的概率和统计 (第二版)	朱永生 著	2006.04
11. 声学理论与工程应用	朱海潮, 等 编著	2006.05
12. 高等原子分子物理学 (第二版)	徐克尊 著	2006.08
13. 大气声学 (第二版)	杨训仁, 陈 宇 著	2007.06
14. 输运理论 (第二版)	黄祖洽 著	2008.01
15. 量子统计力学 (第二版)	张先蔚 编著	2008.02
16. 凝聚态物理的格林函数理论	王怀玉 著	2008.05
17. 激光光散射谱学	张明生 著	2008.05
18. 量子非阿贝尔规范场论	曹昌祺 著	2008.07
19. 狭义相对论 (第二版)	刘 辽, 等 编著	2008.07
20. 经典黑洞与量子黑洞	王永久 著	2008.08
21. 路径积分与量子物理导引	侯伯元, 等 著	2008.09
22. 量子光学导论	谭维翰 著	2009.01
23. 全息干涉计量——原理和方法	熊秉衡, 李俊昌 编著	2009.01
24. 实验数据多元统计分析	朱永生 编著	2009.02
25. 微分几何入门与广义相对论(中册 · 第二版)	梁灿彬, 周 彬 著	2009.03
26. 中子引发轻核反应的统计理论	张竞上 著	2009.03
27. 工程电磁理论	张善杰 著	2009.08
28. 微分几何入门与广义相对论(下册 · 第二版)	梁灿彬, 周 彬 著	2009.08
29. 经典电动力学	曹昌祺 著	2009.08
30. 经典宇宙和量子宇宙	王永久 著	2010.04

31. 高等结构动力学(第二版)　李东旭 著　2010.09
32. 粉末衍射法测定晶体结构(第二版 · 上、下册)　梁敬魁 编著　2011.03
33. 量子计算与量子信息原理　Giuliano Benenti 等 著
　——第一卷：基本概念　王文阁, 李保文 译　2011.03
34. 近代晶体学(第二版)　张克从 著　2011.05
35. 引力理论(上、下册)　王永久 著　2011.06
36. 低温等离子体　B. M. 弗尔曼, И. M. 扎什京 编著
　——等离子体的产生、工艺、问题及前景　邱励俭 译　2011.06
37. 量子物理新进展　梁九卿，韦联福 著　2011.08
38. 电磁波理论　葛德彪，魏 兵 著　2011.08
39. 激光光谱学　W. 戴姆特瑞德 著
　——第 1 卷：基础理论　姬 扬 译　2012.02
40. 激光光谱学　W. 戴姆特瑞德 著
　——第 2 卷：实验技术　姬 扬 译　2012.03
41. 量子光学导论(第二版)　谭维翰 著　2012.05
42. 中子衍射技术及其应用　姜传海, 杨传铮 编著　2012.06
43. 凝聚态、电磁学和引力中的多值场论　H. 克莱纳特 著
　姜 颖 译　2012.06
44. 反常统计动力学导论　包景东 著　2012.06
45. 实验数据分析(上册)　朱永生 著　2012.06
46. 实验数据分析(下册)　朱永生 著　2012.06
47. 有机固体物理　解士杰, 等 著　2012.09
48. 磁性物理　金汉民 著　2013.01
49. 自旋电子学　翟宏如, 等 编著　2013.01
50. 同步辐射光源及其应用(上册)　麦振洪, 等 著　2013.03
51. 同步辐射光源及其应用(下册)　麦振洪, 等 著　2013.03
52. 高等量子力学　汪克林 著　2013.03
53. 量子多体理论与运动模式动力学　王顺金 著　2013.03
54. 薄膜生长(第二版)　吴自勤，等 著　2013.03
55. 物理学中的数学物理方法　王怀玉 著　2013.03
56. 物理学前沿——问题与基础　王顺金 著　2013.06
57. 弯曲时空量子场论与量子宇宙学　刘 辽，黄超光 著　2013.10
58. 经典电动力学　张锡珍，张焕乔 著　2013.10